MA2001-2 Cálculo en Varias Variables
Profesor: Manuel del Pino
Auxiliar: José Armesto P., Sebastián Urzúa B.

Auxiliar 2

23 de Marzo de 2016

1. Resumen

Teorema 1 (Bolzano Weierstrass)**.** *Sea $A \subseteq \mathbb{R}^n$. Luego, A es compacto si y solo si $\forall (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq A$, (x_n) tiene subsucesión convergente en A.*

Definición 1. Una suceción $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}^N$ es de Cauchy si

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N} \text{ tal que } ||x_n - x_m|| < \varepsilon, \forall n, m \geq n_0.$$

Teorema 2. *Si x_n es una sucesión de Cauchy en $\mathbb{R}^N$, entonces existe $x \in \mathbb{R}^N$ con $x_n \to x$.*

Definición 2. Sea $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, y sea $\bar{x} \in A$. Decimos que f es continua en $\bar{x}$ ssi:

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0) \textit{ tal que } (\forall x) \textit{ tq } ||x - \bar{x}|| \leq \delta \Rightarrow ||f(x) - f(\bar{x})|| \leq \varepsilon$$

Proposición 1. *Una función f es continua en x_0 ssi:*

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$$

Teorema 3. *Sea $f : K \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continua, con K compacto. Luego f alcanza su valor máximo y mínimo en K.*

2. Problemas

P1. Considere $\mathbb{R}^n$ con una norma cualquiera $|| \cdot ||$. Sea $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ contractante, es decir:

$$\exists k \in (0,1) \textit{ tal que } ||f(x) - f(y)|| \leq k||x - y||, \ \forall x, y \in \mathbb{R}^n.$$

El objetivo de este problema es demostrar el Teorema de Punto Fijo de Banach para $\mathbb{R}^n$ que dice que, dada una función f contractante de $\mathbb{R}^n$ en $\mathbb{R}^n$, existe un único punto $x^* \in \mathbb{R}^n$ tal que $f(x^*) = x^*$. Sea $x_0 \in \mathbb{R}^n$ cualquiera, considere la sucesión definida por $x_{n+1} = f(x_n), \ \forall n \geq 1$. Para ello siga los siguientes pasos:

a) Demuestre que $||x_{n+1} - x_n|| \leq k^n ||x_1 - x_0||$.

b) Pruebe que $||x_{n+p} - x_n|| \leq \dfrac{k^n}{1-k} ||x_1 - x_0||, \ \forall p \in \mathbb{N}$.

c) Demuestre que $x_n \to x^*$ tal que $f(x^*) = x^*$.

d) Demuestre que x^* es único. Concluya el resultado.

P2. Determine si las siguientes funciones son continuas:

(I) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$$f(x,y) = \begin{cases} (2x^2 + y^2) \sin\left(\frac{1}{x^4 + 2y^2}\right) & \textit{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \textit{si } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

(II) $g : [0, \frac{\pi}{4}] \times [0, 1] \to \mathbb{R}$

$$g(x,y) = \begin{cases} \tan(xy)^{\frac{1}{1-\tan(xy)}} & si\ (x,y) \neq (\frac{\pi}{4}, 1) \\ e^{-1} & si\ (x,y) = (\frac{\pi}{4}, 1). \end{cases}$$

P3. Sea $\phi : \mathbb{R}^N \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ una función continua y defina $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ como

$$f(x) = \phi\left(\frac{x}{||x||}\right).$$

a) Demuestre que el conjunto $\{y \in \mathbb{R}^N,\ ||y|| = 1\}$ es cerrado en $\mathbb{R}^N$.

b) Demuestre que f alcanza sus valores máximo y mínimo sobre $\mathbb{R}^N \setminus \{0\}$. *Indicación: considere la parte anterior.*

c) Demuestre que si f no es una función constante, entonces $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$ no existe.

3. Propuestos

P4. (a) Sea $f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2 y^3}{x^4 + y^6} & si\ (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & si\ (x,y) = (0,0). \end{cases}$

Estudie la existencia del límite en $(0,0)$. Es una función continua?

(b) Sea $\{(x_n, y_n)\}_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión cualquiera contenida en la recta $y = x$, y sea $f(x,y) = \begin{cases} \frac{(xy)^2}{(xy)^2 + (x-y)^2} & si\ (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & si\ (x,y) = (0,0). \end{cases}$

Calcule $\lim\limits_{n \to \infty} f(x_n, y_n)$, cuando $(x_n, y_n) \to 0$. Qué puede decir de la continuidad de f?

P5. Sea $f : A \subset \mathbb{R}^n \to B \subset \mathbb{R}^m$, donde A es cerrado y acotado, f es continua y biyectiva. Pruebe que $f^{-1} : B \to A$ es continua.