PAUTA AUXILIAR 14

P1] ya que es un polinomio de grado 3, es de la forma:

$$ax^3 + bx^2 + cx + d \quad , \text{ con } \quad a \neq 0.$$

como el polinomio es mónico, necesariamente $a = 1$.
Tenemos entonces: $x^3 + bx^2 + cx + d$.

sabemos que $p(0) = 0$
$$\iff 0^3 + b \cdot 0^2 + c \cdot 0 + d = 0$$
$$\implies d = 0$$

ya sabemos entonces que nuestro polinomio es de la forma:
$$x^3 + bx^2 + cx.$$

Pero también sabemos que $p(2) = 0$
$$\iff 2^3 + b2^2 + c \cdot 2 = 8 + 4b + 2c = 0$$
$$\implies c = -4 - 2b \quad (\star)$$

pero aún nos falta una ecuación para encontrar b y c.

Nos dicen que el resto de dividir $p(x)$ en $(x-3)$ es igual al de dividirlo en $(x-1)$.

Recordemos que el teorema del resto nos dice que al dividir un polinomio $p(x)$ en algo de la forma $(x-c)$, el resto es $p(c)$.

Por lo tanto el resto de dividir $p(x)$ en $(x-3)$ es $p(3)$ y el de dividir $p(x)$ en $(x-1)$ es $p(1)$
$$\implies p(3) = p(1)$$
$$\iff 3^3 + b3^2 + c \cdot 3 = 1^3 + b \cdot 1^2 + c \cdot 1$$
$$\iff 27 + 9b + 3c = 1 + b + c$$
$$\iff 8b + 2c = -26$$

reemplazando c de $(\star)$ queda
$$8b + 2(-4 - 2b) = -26$$

$\iff 8b - 8 - 4b = -26$

$\iff 4b = -18$

$\Rightarrow b = -\frac{18}{4} = -\frac{9}{2}$

$\Rightarrow c = -4 - 2 \cdot -\frac{9}{2} = 5$

$\Rightarrow p(x) = x^3 - \frac{9}{2}x^2 + 5$

P2) Notemos que $z^6 - 2iz^3 - 1 = (z^3 - i)^2$

Entonces tenemos que resolver

$$(z^3 - i)^2 = 0$$

$$\Rightarrow z^3 - i = 0$$

$$\iff z^3 = i$$

$z = Re^{i\theta}$

$$\iff (Re^{i\theta}) = 1 \cdot e^{i\frac{\pi}{2}}$$

$$\Rightarrow R = \sqrt[3]{1} = 1$$

$$\theta = \frac{\frac{\pi}{2} + 2k\pi}{3} \qquad k \in \{0, 1, 2\}$$

$\Rightarrow z_1 = e^{i\frac{\pi}{6}}$

$z_2 = e^{i\frac{5\pi}{6}}$

$z_3 = e^{i\frac{3\pi}{2}}$

$$\Rightarrow (z^3 - i) = (z - z_1)(z - z_2)(z - z_3) = 0$$

(z_1, z_2 y z_3 son las raíces de $z^3 - i$)

multiplicidad

$$\Rightarrow z^6 - 2iz^3 - 1 = (z - z_1)^2 (z - z_2)^2 (z - z_3)^2 = 0$$

$\therefore$ las raíces son z_1, z_2 y z_3 y cada una tiene multiplicidad 2.

P2) $p(x) = 6x^5 - 25x^4 + 16x^3 + 21x^2 - 18x$

$\Rightarrow p(x) = x(6x^4 - 25x^3 + 16x^2 + 21x - 18)$

Sabemos que si $\frac{r}{s}$ es raiz

$\Rightarrow r | a_0 \wedge s | a_n$

$\Rightarrow$ como tenemos 3 raices enteras

$r_1 | 18 \quad , r_2 | 18 \quad , r_3 | 18$

OJO QUE PUEDE SER QUE alguna de esas r se la raiz 0 que ya está contabilizada.

Como son no negativas

$\Rightarrow r_i \in \{1, 2, 3, 6, 9, 18\} \quad i \in \{1, 2, 3\}$

claramente $6 \cdot 18^5$ es muy grande jamás $p(18) = 0$

$\Rightarrow$ vamos a partir con las menores.

$r = 1 \Rightarrow 6 - 25 + 16 + 21 - 18 = 0$ //

$$
\begin{array}{l}
6x^4 - 25x^3 + 16x^2 + 21x - 18 \div (x-1) = 6x^3 - 19x^2 - 3x + 18 \\
-(6x^4 - 6x^3) \\
\hline
\quad -19x^3 + 16x^2 \\
\quad -(-19x^3 + 19x^2) \\
\hline
\qquad -3x^2 + 21x \\
\qquad -(-3x^2 + 3x) \\
\hline
\qquad\quad 18x - 18 \\
\qquad\quad 18x - 18 \\
\hline
\qquad\qquad 0 \text{ //}
\end{array}
$$

Veamos si $r=2$

$$6\cdot 8 - 19\cdot 4 - 3\cdot 2 + 18 \neq 0$$

$r=3$

$$6\cdot 3^3 - 19\cdot 9 - 3\cdot 3 + 18 = 0$$

$$6x^3 - 19x^2 - 3x + 18 \div (x-3) = 6x^2 - x - 6$$

$$\begin{array}{l}
-(6x^3 - 18x^2) \\
\hline
\quad -x^2 - 3x \\
-(-x^2 + 3x) \\
\hline
\quad\quad -6x + 18 \\
\quad -(-6x + 18) \\
\hline
\quad\quad\quad 0 \;//
\end{array}$$

$$6x^2 - x - 6 = 0 \Rightarrow x = \frac{1 \pm \sqrt{1+4\cdot 6\cdot 6}}{12} = \frac{1\pm\sqrt{145}}{12} \;//$$

$$\Rightarrow p(x) = x(x-1)(x-3)\left(x - \frac{1-\sqrt{145}}{12}\right)\left(x - \frac{1+\sqrt{145}}{12}\right)$$

P4) $$p(x) = \sum_{j=1}^{6} \frac{(-1)^j}{(j+1)^2} \sum_{k=1}^{j} \left(4k^3 x^{j-1}\right)$$

$$= \sum_{j=1}^{6} \frac{(-1)^j}{(j+1)^2} \cdot 4x^{j-1} \underbrace{\sum_{k=1}^{j} k^3}_{\left(\frac{j(j+1)}{2}\right)^2}$$

$\leftarrow$ suma conocida

$$= \sum_{j=1}^{6} \frac{(-1)^j}{\cancel{(j+1)^2}} \cdot \cancel{4} x^{j-1} \cdot \frac{j^2 \cancel{(j+1)^2}}{\cancel{4}}$$

$$= \sum_{j=1}^{6} (-1)^{2} \cdot j^2 x^{j-1} = 36x^5 - 25x^4 + 16x^3 - 9x^2 + 4x - 1$$

Nuevamente, tenemos que si una raíz es de la forma $\frac{r}{s}$

$$r \mid a_0 \quad \wedge \quad s \mid a_n$$

Como estamos buscando raíces enteras, son de la forma

$$r = \frac{r}{1} \implies r \mid a_0$$

entonces tenemos que buscar entre los números que dividen a -1, es decir 1 y -1.

probemos:

$$p(1) = 36 - 25 + 16 - 9 + 4 - 1 \neq 0$$
$$p(-1) = -36 - 25 - 16 - 9 - 4 - 1 \neq 0.$$

$\therefore$ $p(x)$ <u>NO</u> tiene raíces enteras.

P5) a) Recordemos que una relación es de equivalencia si es refleja ($xRx \ \forall x$), simétrica ($xRy \Rightarrow yRx \ \forall x,y$) y transitiva ($xRy \wedge yRz \Rightarrow xRz$).

- veamos que es refleja:

$z_1 R z_1 \iff z_1 \cdot \overline{z_1} \in \mathbb{R}$

pero $z_1 \cdot \overline{z_1} = |z_1|^2 \in \mathbb{R} \quad \forall z \in \mathbb{C}$

$\Rightarrow z_1 \cdot \overline{z_1} \in \mathbb{R} \Rightarrow z_1 R z_1$

$\therefore$ R es refleja

- P.D.Q: R es simétrica

supongamos que $z_1 R z_2$

$\iff z_1 \cdot \overline{z_2} \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow \overline{z_1 \cdot \overline{z_2}} \in \mathbb{R}$

$\iff \overline{z_1} \, z_2 \in \mathbb{R}$

$\iff z_2 \cdot \overline{z_1} \in \mathbb{R}$

$\iff z_2 R z_1$

$\therefore$ R es simétrica

- P.D.Q: R es transitiva

supongamos que $z_1 R z_2 \wedge z_2 R z_3$

$\iff z_1 \cdot \overline{z_2} \in \mathbb{R} \wedge z_2 \cdot \overline{z_3} \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow z_1 \cdot \overline{z_2} \cdot z_2 \cdot \overline{z_3} \in \mathbb{R}$ (multiplicación de reales es real)

$\iff |z_2|^2 \cdot z_1 \cdot \overline{z_3} \in \mathbb{R}$

pero $|z_2|^2 \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow z_1 \cdot \overline{z_3} \in \mathbb{R}$

$\iff z_1 R z_3$ //

$\therefore$ R es transitiva

$\therefore$ R es una relación de equivalencia.

b) P.D.Q $[z]_R = \{a\cdot z : a\in\mathbb{R}\setminus\{0\}\}$

Recordemos que la clase de equivalencia de z son todos aquellos que se relacionan con z, es decir:

$$[z]_R = \{w : wRz\}$$

pero $wRz \iff w\cdot\bar{z}\in\mathbb{R}$

$\iff w\cdot\bar{z} = r \quad , r\in\mathbb{R}$

$\iff w = \frac{r}{\bar{z}}\circ\frac{z}{z}$

$\iff w = \underbrace{\frac{r}{|z|^2}}_{\in\mathbb{R}}\cdot z$

$\iff w = a\cdot r \quad , a\in\mathbb{R}$

$\Rightarrow [z]_R = \{a\cdot z : a\in\mathbb{R}\setminus\{0\}\}$

P6) a) Sabemos que $z^n = 1 \wedge w^m = 1$

$\Rightarrow z^n \cdot w^m = 1$

Estamos buscando K tal que $(zw)^K = 1$

Basta tomar $K = m \cdot n$

$(zw)^K = (zw)^{mn} = z^{mn} \cdot w^{mn} = (z^n)^m \cdot (w^m)^n$

$= 1^m \cdot 1^n = 1 \cdot 1 = 1$

b) P.D.Q: $(G, \cdot)$ es subgrupo

- P.D.Q $G \neq \emptyset$

En efecto, $1 \in G$ ya que $1^n = 1$

$\therefore G \neq \emptyset$

- P.D.Q $\forall x, y \in G \quad x \cdot y^{-1} \in G$

$\Leftrightarrow$ P.D.Q $x \cdot y^{-1}$ es raíz n-ésima de la unidad para algún n.

Por (a) sabemos que la multiplicación de 2 raíces también es raíz.

Como $x \in G$, x es raíz, falta ver que y^{-1} también lo es.

Como $y \in G$, "y" es raíz m-ésima para algún m

$\Leftrightarrow y^m = 1$

$\Rightarrow (y^{-1})^m = \left(\frac{1}{y}\right)^m = \frac{1}{y^m} = \frac{1}{1} = 1$

$\Rightarrow y^{-1}$ también es raíz m-ésima de la unidad

Por (a), $\exists K$ tal que $(x \cdot y^{-1})^K = 1$

$\Rightarrow x \cdot y^{-1} \in G$

$\therefore (G, \cdot)$ es subgrupo.

c) P.D.Q $\varphi : (G, \cdot) \rightarrow (G, \cdot)$ es isomorfismo

$\varphi(w) = \frac{1}{w}$

- P.D.Q: φ es morfismo

En efecto $\varphi(x \cdot y) = \frac{1}{x \cdot y} = \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{y} = \varphi(x) \cdot \varphi(y)$

- P.D.Q φ es Biyectiva

veamos que $\exists\, \varphi^{-1}$

$$\varphi(\varphi^{-1}(w)) = w$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{1}{\varphi^{-1}(w)} = w$$

$$\Leftrightarrow \quad \varphi^{-1}(w) = \frac{1}{w}$$

$\therefore\ \varphi^{-1}(w)$ existe

$\therefore\ \varphi$ es Biyectiva

$\therefore\ \varphi$ es isomorfismo