

75)

$$\sum_{k=1}^{2n} \frac{1}{(3+(-1)^k)^k}$$

$$= \frac{1}{(3+(-1)^1)^1} + \frac{1}{(3+(-1)^2)^2} + \frac{1}{(3+(-1)^3)^3} + \dots + \frac{1}{(3+(-1)^{2n-1})^{2n-1}} + \frac{1}{(3+(-1)^{2n})^{2n}}$$

$$= \frac{1}{2^1} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{4^4} + \dots + \frac{1}{2^{2n-1}} + \frac{1}{4^{2n}}$$

$$= \sum_{i \text{ impar}} \frac{1}{2^i} + \sum_{k \text{ par}} \frac{1}{4^k}$$

RECORDAMOS QUE $i \text{ impar} \Leftrightarrow i = 2j - 1$

$$= \sum_{j=1}^n \frac{1}{2^{2j-1}} + \sum_{j=1}^n \frac{1}{4^{2j}}$$

$$= 2 \sum_{j=1}^n \left(\frac{1}{4}\right)^j + \sum_{j=1}^n \left(\frac{1}{16}\right)^j$$

OSO LA
GEOM.
PARTE DE
0

$$= 2 \left(\sum_{j=0}^n \left(\frac{1}{4}\right)^j - \left(\frac{1}{4}\right)^0 \right) + \sum_{j=0}^n \left(\left(\frac{1}{16}\right)^j - \left(\frac{1}{16}\right)^0 \right)$$

$$= 2 \cdot \frac{\left(\frac{1}{4}\right)^{n+1} - 1}{\frac{1}{4} - 1} - 2 + \frac{\left(\frac{1}{16}\right)^{n+1} - 1}{\frac{1}{16} - 1} - 1$$

$$= \frac{8}{3} \left(1 - \frac{1}{4}^{n+1} \right) + \frac{16}{15} \left(1 - \frac{1}{16}^{n+1} \right) - 3 //$$

P6 $S_1 \neq \emptyset$ $\wedge$ $S_2 \neq \emptyset$ pues en ambos están el 0.

además $S_1 \subseteq \mathbb{Z}$ $\wedge$ $S_2 \subseteq \mathbb{Z}$

PARA que $(S_1, +)$ sea grupo

$$\Rightarrow \forall x, y \in S_1 \Rightarrow x + (-y) \in S_1$$

$$x \in S_1 \Rightarrow x = 3K$$

$$y \in S_1 \Rightarrow y = 3K' \Rightarrow -y = -3 \cdot K' = 3 \cdot (-K') = 3K''$$

$$\Rightarrow x + (-y) = 3K + 3K'' = 3(K + K'')$$

Análogo para S_2 .

Veamos para $(S_1 \cup S_2, +)$

$S_1 \cup S_2 \neq \emptyset$ pues $S_1 \subseteq S_1 \cup S_2 \wedge S_1 \neq \emptyset$

además $S_1 \subseteq \mathbb{Z} \wedge S_2 \subseteq \mathbb{Z}$

$$\Rightarrow S_1 \cup S_2 \subseteq \mathbb{Z} \cup \mathbb{Z} = \mathbb{Z} //$$

Veamos si $\forall x, y \in S_1 \cup S_2 \Rightarrow (x + (-y)) \in S_1 \cup S_2$

Sabemos que si $x, y \in S_1 \cup S_2 \Rightarrow x \in S_1 \vee x \in S_2$
 $y \in S_1 \vee y \in S_2$

por la parte anterior sabemos que

$$x \in S_1 \wedge y \in S_1 \Rightarrow x + (-y) \in S_1 \Rightarrow x + (-y) \in S_1 \cup S_2$$

idem para S_2

el caso interesante es
 $x \in S_1 \wedge y \in S_2$ (que es igual a $x \in S_2 \wedge y \in S_1$)

$x + (-y) = 3K + 2K'$ ¿ es necesariamente
esto de la forma
 $3K'' \vee 2K'''$?

NO Por ejemplo si $K = K' = 1$

$$\Rightarrow x + (-y) = 5 \neq 2K''' \vee 3K''$$

$\Rightarrow (S_1 \cup S_2, +)$ NO ES
SUBGRUPO.

P3 $x^4 + 2 = 0$
 $\Rightarrow x^4 = -2 = 2e^{i\pi}$

sea $x = re^{i\alpha}$

$\Rightarrow r^4 = 2 \Rightarrow r = \sqrt[4]{2}$

$\alpha = \frac{\pi + 2k\pi}{4} = \frac{(2k+1)\pi}{4}$
 $k \in \{0, 1, 2, 3\}$ //

$r_1 = \sqrt[4]{2} e^{i\frac{\pi}{4}} = \sqrt[4]{2} \left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) \right)$
 $= \sqrt[4]{2} \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i \frac{\sqrt{2}}{2} \right)$

$r_2 = \sqrt[4]{2} e^{i\frac{3\pi}{4}} = \sqrt[4]{2} \left(-\frac{\sqrt{2}}{2} + i \frac{\sqrt{2}}{2} \right)$

$r_3 = \sqrt[4]{2} e^{i\frac{5\pi}{4}} = \sqrt[4]{2} \left(-\frac{\sqrt{2}}{2} - i \frac{\sqrt{2}}{2} \right)$

$r_4 = \sqrt[4]{2} e^{i\frac{7\pi}{4}} = \sqrt[4]{2} \left(\frac{\sqrt{2}}{2} - i \frac{\sqrt{2}}{2} \right)$

$\Rightarrow$ factorizado en $\mathbb{C}$

$$p(x) = \overset{(1)}{\left(x - \sqrt[4]{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} - \sqrt[4]{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} i \right)} \overset{(2)}{\left(x - \sqrt[4]{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + \sqrt[4]{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} i \right)} \cdot$$

$$\overset{(3)}{\left(x + \sqrt[4]{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} - \sqrt[4]{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} i \right)} \overset{(4)}{\left(x + \sqrt[4]{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + \sqrt[4]{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} i \right)}$$

En $\mathbb{R}$ Hay que multiplicar (1) con (2)

y (3) con (4) notando la
 suma por diferencia.

$$\text{Si } \sum_{k=1}^n a_k = \frac{n^2 + 5n}{3} \Rightarrow ? a_n?$$

$$a_1 + a_2 + \dots + a_{n-1} + a_n = \frac{n^2 + 5n}{3}$$

$$\Rightarrow a_n = \frac{n^2 + 5n}{3} - (a_1 + a_2 + \dots + a_{n-1})$$

$$\Rightarrow a_n = \frac{n^2 + 5n}{3} - \sum_{k=1}^{n-1} a_k$$

$$\Rightarrow a_n = \frac{n^2 + 5n}{3} - \left(\frac{(n-1)^2 + 5(n-1)}{3} \right)$$

$$= \frac{n^2 + 5n - (n^2 - 2n + 1 + 5n - 5)}{3}$$

$$= \frac{\cancel{n^2} + 5\cancel{n} - \cancel{n^2} + 2n - 1 - 5\cancel{n} + 5}{3}$$

$$= \frac{2n + 4}{3} //$$

PDQ: $z + \frac{1}{z} \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \operatorname{Im}(z) = 0 \vee |z| = 1$

$\Rightarrow \boxed{z = a + bi}$ además $z \bar{z} = |z|^2$
 $\frac{\bar{z}}{|z|^2} = \frac{1}{z}$

$$\begin{aligned} z + \frac{1}{z} &= z + \frac{\bar{z}}{|z|^2} = \frac{a+bi + \frac{a-bi}{a^2+b^2}}{1} \\ &= \frac{a(a^2+b^2) + b(a^2+b^2)i + a-bi}{a^2+b^2} \\ &= \frac{a(a^2+b^2) + a + b(a^2+b^2-1)i}{a^2+b^2} \end{aligned}$$

para que $\in \mathbb{R} \Rightarrow \operatorname{Im}\left(z + \frac{1}{z}\right) = 0$

$\Rightarrow b(a^2+b^2-1) = 0$

$\Rightarrow b = 0 \quad \vee \quad a^2+b^2 = 1$

$\Rightarrow \operatorname{Im}(z) = 0 \quad \vee \quad |z|^2 = 1$

$\Rightarrow \operatorname{Im}(z) = 0 \quad \vee \quad |z| = 1 //$

$\boxed{\Leftarrow}$ si $\operatorname{Im}(z) = 0 \Rightarrow z \in \mathbb{R}$, $\frac{1}{z} \in \mathbb{R} \Rightarrow z + \frac{1}{z} \in \mathbb{R} //$

si $|z| = 1 \Rightarrow z + \frac{\bar{z}}{|z|^2} = z + \bar{z} = 2\operatorname{Re}(z) \in \mathbb{R} //$

Sea $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ $f(z) = \bar{z}$

1) PDA: f es isomorfismo entre
 $(\mathbb{C}, +, \cdot)$ y $(\mathbb{C}, +, \cdot)$

1.1 PDA: f es biyectivo

1.1.1) PDA: f es inyectivo

$$f(x) = f(y) \Rightarrow \bar{x} = \bar{y} \quad (\overline{\quad})$$
$$\Rightarrow \overline{\bar{x}} = \overline{\bar{y}}$$

$$\star \Rightarrow \boxed{x = y} \quad \because f \text{ iny.}$$

1.1.2) PDA: f es sobreyectivo

basta tomar $\bar{z}$ y $f(\bar{z}) = \overline{\bar{z}} = z$
 $\Rightarrow$ TODO z TIENE PRE-IMAGEN

$$\star \star \Rightarrow f \text{ sob} //$$

$$\star + \star \star \Rightarrow f \text{ biyectiva} //$$

1.2) PDA: f es morfismo

$$1.2.1) f(x+y) = f(x) + f(y)$$

$$f(x+y) = \overline{x+y} = \bar{x} + \bar{y} = f(x) + f(y) //$$

$$1.2.2) f(xy) = f(x) \cdot f(y)$$

$$f(xy) = \overline{xy} = \bar{x} \cdot \bar{y} = f(x) \cdot f(y) //$$

$\therefore f$ es isomorfismo.