MA1101-7 Introducción al Álgebra
Profesores: José Soto San Martín
Auxiliares: Ilana Mergudich Thal
Fecha: Jueves 11 de Agosto

Auxiliar Extra: Examen

P1. *[Examen 2009-2]* Pruebe que $\sum_{k=1}^{n} k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4} \forall n \in \mathbb{N}_+$.

P2. *[Examen 2008]* Considere la función $F : \mathbb{R}[x] \to \mathbb{R}$ que a cada polinomio $p(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k \in \mathbb{R}[x]$ le asocia

$$F(p(x)) = \sum_{k=0}^{n} a_k,$$

es decir, a cada polinomio le asocia la suma de sus coeficientes. Estudie si F es una función inyectiva y sobreyectiva. Justifique.

P3. *[Examen 2013]* Calcule, para todo $n \in \mathbb{N}$, el valor de $\sum_{j=0}^{2n} \binom{2n}{j}$ y $\sum_{j=0}^{2n} (-1)^j \binom{2n}{j}$. A partir de los resultados obtenidos calcule $\sum_{k=0}^{2n} \binom{2n}{2k}$.

P4. *[Examen 2012]* Sea $a \in \mathbb{R}$. Se define $\varphi : \mathbb{R}[x] \to \mathbb{R}$ por

$$\varphi(p(x)) = p(a), \forall p(x) \in \mathbb{R}[x].$$

a) Demuestre que φ es un morfismo epiyectivo entre los anillos $(\mathbb{R}[x], +, \cdot)$ y $(\mathbb{R}, +, \cdot)$.

b) Pruebe que $\varphi^{-1}(\{0\}) = \{(x-a)q(x) | q(x) \in \mathbb{R}[x]\}$.

P5. *[Examen Recuperativo 2008]* Calcule

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{x^k}{k+1}$$

P6. *[Examen 2010]* Sea $m, n, k \in \mathbb{N}$ cualquiera y considere los polinomios $p(x) = x^{3n} + x^{3m+1} + x^{3k+2}$ y $q(x) = x^2 + x + 1$. Demuestre que $p(x)$ es divisible por $q(x)$, cualquiera sean los valores de $n, m, k \in \mathbb{N}$.

P7. *[Examen 2009-2]* Determine si las siguientes funciones son biyectivas, y encuentre la inversa en el caso de que exista:

a) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}, f(x) = ix^4$

b) $g : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+, g(x) = \frac{1}{17x}$

c) $h : \mathbb{C} \to \mathbb{C}, h(z) = 3i(\overline{z} + 1)$