



Pauta Examen

- P1.** a) (2,0 pts.) Como $f(1) = i = f(-1)$, la función f no es inyectiva, y por lo tanto no es biyectiva y no tiene inversa.

Como $g(g(x)) = \frac{1}{17\frac{1}{17x}} = \frac{17x}{17} = x$, la función g es biyectiva y su propia inversa.

Considere $h' : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ dado por $h'(z) = -\frac{1}{3}iz - 1$. Como $h(h'(z)) = 3i(\overline{h'(z)} + 1) = 3i(\overline{-\frac{1}{3}iz - 1} + 1) = z$ y también $h'(h(z)) = z$, se tiene que h' es la inversa de h (y h es biyectiva).

- b) (1,0 pto.) Calculamos

$$\begin{aligned} z &= \left| \frac{i}{1-i} \right| e^{i\frac{\pi}{4}} \\ &= \frac{|i|}{|1-i|} \left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}i \right) \\ &= \frac{1}{2} + \frac{1}{2}i. \end{aligned}$$

- c) (3,0 pts.) La reflejividad vale porque $|c| \in \mathbb{R}$ para todo $c \in \mathbb{C}$, y por lo tanto existe un $n \in \mathbb{N}$ con $n \leq |c| < n+1$. La simetría es inmediata. Para ver la transitividad, sean $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}$ con $z_1 \sim z_2$ y $z_2 \sim z_3$. Entonces existen $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$ tales que $n_j \leq \min\{|z_j|, |z_{j+1}|\} \leq \max\{|z_j|, |z_{j+1}|\} < n_j + 1$ para $j = 1, 2$. En particular, $n_j \leq |z_2| < n_{j+1}$ para $j = 1, 2$. Eso implica que $n_1 = n_2$, y entonces, $z_1 \sim z_3$.

Para el dibujo, observamos que $3-i$ tiene modulo $|3-i| = \sqrt{10}$. Entonces su clase de equivalencia son todos los puntos con modulo ≥ 3 y < 4 .

Para la última parte, es suficiente mostrar que para cada $z \in \mathbb{C}$ existe un $k \in \mathbb{N}$ tal que $z \sim ki$. Vamos a ver que este k puede ser elegido como el mayor número natural m con $m \leq |z|$. En efecto, como $|mi| = m|i| = m \cdot 1 = m$, se tiene que $m \leq |mi| \leq |z| < m+1$ y entonces $z \sim mi$.

- P2.** a) (1,0 pto.) Sabemos que $p \frac{(p-1)!}{(p-k)!k!} = \frac{p(p-1)(p-2)\dots(p-k+1)}{k(k-1)(k-2)\dots 2} = \binom{p}{k} \in \mathbb{Z}$. Entonces cada uno de los números $2, 3, \dots, k$ divide al producto $p(p-1)(p-2)\dots(p-k+1)$. Pero p no tiene divisores (menos el 1), entonces cada uno de los números $2, 3, \dots, k$ divide también al producto $(p-1)(p-2)\dots(p-k+1)$.

Por lo tanto, $\frac{(p-1)!}{(p-k)!k!} = \frac{\binom{p}{k}}{p} \in \mathbb{Z}$.

b) (2,5 ptos.) Por el teorema del binomio,

$$\begin{aligned}
(a+b)^p &= \sum_{k=0}^p \binom{p}{k} a^k b^{p-k} \\
&= a^p + b^p + \sum_{k=1}^{p-1} \binom{p}{k} a^k b^{p-k} \\
&= a^p + b^p + \sum_{k=1}^{p-1} \frac{p!}{(p-k)!k!} a^k b^{p-k} \\
&= a^p + b^p + p \sum_{k=1}^{p-1} \frac{(p-1)!}{(p-k)!k!} a^k b^{p-k}.
\end{aligned}$$

Usando 2a), se tiene $\frac{(p-1)!}{(p-k)!k!} \in \mathbb{Z}$ y por lo tanto $d := \sum_{k=1}^{p-1} \frac{(p-1)!}{(p-k)!k!} a^k b^{p-k} \in \mathbb{Z}$. En total, tenemos $(a+b)^p = a^p + b^p + dp$, con $d \in \mathbb{Z}$, que equivale a $(a+b)^p \equiv_p a^p + b^p$.

c) (1,5 ptos.) Por definición de $+_p$ existe un $d \in \mathbb{Z}$ tal que vale

$$f(a+_p b) = f(a+b+dp) = (a+b+dp)^p \equiv_p (a+b)^p + (dp)^p \equiv_p a^p + b^p + d^p p^{p-1} \cdot p = f(a) + f(b) + d'p,$$

donde $d' = d^p p^{p-1}$ y donde hemos usado 2 b) dos veces. Entonces, $f(a+_p b) \equiv_p f(a) + f(b)$, que prueba que f es un homomorfismo.

d) (1,0 pto.) Tenemos que $0 \equiv_p a+_p (-a)$ y entonces $0 \equiv_p 0^p \equiv_p (a+_p (-a))^p \equiv_p a^p+_p (-a)^p$. Por lo tanto, a^p es el inverso aditivo de $(-a)^p$.

P3. a) (2,0 ptos.) Usa inducción en n . El caso base $n = 1$ es fácil. El paso inductivo calculamos de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n+1} k^3 &= \sum_{k=1}^n k^3 + (n+1)^3 \\
&= \frac{1}{4} n^2 (n+1)^2 + (n+1)^3 \\
&= \frac{1}{4} (n+1)^2 (n^2 + 4n + 4) \\
&= \frac{1}{4} (n+1)^2 (n+2)^2.
\end{aligned}$$

b) (2,0 ptos.) Usando 3a), tenemos

$$\begin{aligned}
p(x) &= \sum_{j=1}^6 \frac{1}{(j+1)^2} (-1)^j \left(\sum_{k=1}^j 4k^3 x^{j-1} \right) \\
&= \sum_{j=1}^6 (-1)^j x^{j-1} \left(\frac{4}{(j+1)^2} \sum_{k=1}^j k^3 \right) \\
&= \sum_{j=1}^6 (-1)^j j^2 x^{j-1} \\
&= 36x^5 - 25x^4 + 16x^3 - 9x^2 + 4x - 1.
\end{aligned}$$

Por el teorema de las raíces racionales, las únicas raíces posibles de este polinomio serían 1 y -1 . Pero $p(1) \neq 0 \neq p(-1)$, por lo tanto p no tiene raíces racionales.

- c) (2,0 ptos.) Se tiene $p(x) - q(x) = 6x^5 - 25x^4 + 16x^3 + 21x^2 - 18x$. Inmediatamente tenemos que $x = 0$ es raíz, y con el teorema de las raíces racionales y la regla de Ruffini uno obtiene que $x = 1$ y $x = 3$ también lo son. Sigue que $p(x) - q(x) = x(x-1)(x-3)(6x^2 - x - 6)$. El polinomio $6x^2 - x - 6$ tiene las raíces $\frac{1}{12}(1 \pm \sqrt{145})$, entonces sigue

$$p(x) - q(x) = 6x(x-1)(x-3)\left(x - \frac{1}{12}(1 + \sqrt{145})\right)\left(x - \frac{1}{12}(1 - \sqrt{145})\right).$$

5 de diciembre de 2009

Sin consultas

Tiempo: 3:00