



EXAMEN

P1. Sea $K = \{a + b\sqrt{2} \mid a, b \in \mathbb{Q}\}$. Se define, para cada $z = a + b\sqrt{2} \in K$, con $a, b \in \mathbb{Q}$, $\widehat{z} = a - b\sqrt{2}$.

a) (0,5 ptos.) Muestre que $\forall \alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{Q}$,

$$\alpha + \beta\sqrt{2} = \gamma + \delta\sqrt{2} \Leftrightarrow \alpha = \gamma \wedge \beta = \delta.$$

b) (0,5 ptos.) Dado $z \in K$, muestre que $z \in \mathbb{Q} \Leftrightarrow z = \widehat{z}$.

c) (1,0 pto.) Demuestre que $f : (K, +, \cdot) \rightarrow (K, +, \cdot)$ (donde $+$ y \cdot son la suma y producto habituales de \mathbb{R}), dada por $f(z) = \widehat{z}$, es un isomorfismo.

d) Sea $p(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n \in \mathbb{R}[x]$ un polinomio con coeficientes en \mathbb{Q} . Pruebe que,

i) (1,5 ptos.) $\forall z \in K$,

$$\widehat{p(z)} = p(\widehat{z}).$$

ii) (1,0 ptos.) Si $z \in K$ es raíz de p , entonces \widehat{z} también es raíz de p .

iii) (1,5 ptos.) Si $\text{gr}(p) = 3$ y p tiene al menos una raíz en K , entonces p tiene al menos una raíz en \mathbb{Q} .

P2. a) i) (1,5 ptos.) Demuestre que las soluciones de la ecuación $q(x) = x^2 + x + 1 = 0$ son raíces cúbicas de la unidad.

ii) (1,5 ptos.) Sea $p(x) = x^{3n_1} + x^{3n_2+1} + x^{3n_3+2}$, donde $n_1, n_2, n_3 \in \mathbb{N}$. Demuestre que $p(x)$ es divisible por $q(x)$, cualquiera sean los valores de n_1, n_2, n_3 .

b) Se define en $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ la relación \mathcal{R} dada por $z_1 \mathcal{R} z_2 \Leftrightarrow z_1 \cdot \overline{z_2} \in \mathbb{R}$.

i) (2,0 ptos.) Demuestre que \mathcal{R} es una relación de equivalencia.

ii) (1,0 pto.) Muestre que $[z]_{\mathcal{R}} = \{a \cdot z \mid a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}\}$.

P3. a) (2,0 ptos.) Calcule, para todo $n \in \mathbb{N}$, el valor de $\sum_{j=0}^{2n} \binom{2n}{j}$ y $\sum_{j=0}^{2n} (-1)^j \binom{2n}{j}$. A partir de los resultados

obtenidos, calcule $\sum_{k=0}^n \binom{2n}{2k}$.

b) Sea $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión de números reales definida recursivamente por

$$a_0 = 1, \quad a_{n+1} = \frac{a_n}{n+1}.$$

i) (2,0 ptos.) Pruebe por inducción que $a_n \leq \frac{1}{2^{n-1}}, \forall n \in \mathbb{N}$.

ii) (2,0 ptos.) Use la desigualdad anterior para demostrar que $\sum_{k=0}^n a_k < 3, \forall n \in \mathbb{N}$.

Consultas sólo al auxiliar
Justifique cada uno de sus pasos
Tiempo: 3:00