



Ingeniería Matemática  
FACULTAD DE CIENCIAS  
FÍSICAS Y MATEMÁTICAS  
UNIVERSIDAD DE CHILE  
Introducción al Álgebra 12-1

## Examen

**P1.** Sea  $G = \{x \in \mathbb{R} | x > 1\}$ . Para  $x, y \in G$  se define la l.c.i  $*$  por:  $x * y = xy - x - y + 2$ .

- i) (3,0 ptos.) Demuestre que  $(G, *)$  es grupo abeliano.
- ii) (1,5 ptos.) Pruebe que  $(G, *)$  es isomorfo a  $(\mathbb{R}^+, \cdot)$ .
- iii) (1,5 ptos.) Sea  $H = \{q \in \mathbb{Q} | q > 1\}$ . Pruebe que  $(H, *)$  es subgrupo de  $(G, *)$ .

**P2.** i) (2,0 ptos.) Para  $z \in \mathbb{C}$ ,  $z \neq 0$ , demuestre que

$$(z + \frac{1}{z}) \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \text{Im}(z) = 0 \vee |z| = 1.$$

- ii) (2,0 ptos.) Determine  $a, b$  reales de modo que  $1 + i$  sea una solución de la ecuación  $x^5 + ax^3 + b = 0$ .
- iii) (2,0 ptos.) Resuelva la ecuación  $z^3 + i = 0$ .

**P3.** a) (3,0 ptos.) Sea  $p(x) = x^5 - 5x^4 + 14x^3 - 14x^2 + 13x - 9$ . Se sabe que una de las raíces de  $p(x)$  es  $x = i$ . Calcule todas las raíces de  $p$  y factorícelo en  $\mathbb{R}$  y en  $\mathbb{C}$ .

b) Sea  $a \in \mathbb{R}$ . Se define  $\varphi : \mathbb{R}[x] \rightarrow \mathbb{R}$  por

$$\varphi(p(x)) = p(a), \quad \forall p(x) \in \mathbb{R}[x].$$

- b1) (1,5 ptos.) Demuestre que  $\varphi$  es un morfismo epiyectivo entre los anillos  $(\mathbb{R}[x], +, \cdot)$  y  $(\mathbb{R}, + \cdot)$ .
- b2) (1,5 ptos.) Pruebe que  $\varphi^{-1}(\{0\}) = \{(x - a)q(x) | q(x) \in \mathbb{R}[x]\}$ .

**Indicación:**  $\varphi^{-1}(\{0\})$  es el conjunto preimagen del conjunto  $\{0\}$ .

Consultas sólo al auxiliar  
Justifique cada uno de sus pasos  
Tiempo: 3 hrs.