



Ingeniería Matemática  
FACULTAD DE CIENCIAS  
FÍSICAS Y MATEMÁTICAS  
UNIVERSIDAD DE CHILE  
Álgebra 08-1

### Examen Recuperativo

**Indicación:** Este examen tiene 18 puntos. Es decir, con 9 puntos se obtiene nota 4,0. Dado que es un examen de segunda instancia no es posible obtener nota 7,0. El máximo puntaje que se puede obtener es aquel que usted requiera para aprobar. Por esto se le sugiere concentrarse en obtener respuestas completas más que partes de cada pregunta.

**P1.** Considere las funciones  $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R} \setminus \{0\}$  y  $g: \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$  definidas por

$$f(n) = 1 - \sum_{k=0}^n \frac{k}{(k+1)!}, \quad \forall n \in \mathbb{N}$$
$$g(x) = x^{-1}, \quad \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

(i) (1,0 pts.) Expresar  $f(n)$  en función de  $n$ .

(ii) (2,0 pts.) Verificar que  $\text{Im}(g \circ f) \subseteq \mathbb{N}$ . ¿Es  $g \circ f$  inyectiva, epiyectiva, biyectiva? Justifique.

**P2.** Sea  $L = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x - 2y = 0\}$ . Se define en  $\mathbb{R}^2$  la relación  $\mathcal{R}$  por

$$(x_1, y_1) \mathcal{R} (x_2, y_2) \Leftrightarrow (x_1 - x_2, y_1 - y_2) \in L.$$

(i) (2,0 pts.) Pruebe que  $\mathcal{R}$  es una relación de equivalencia.

(ii) (1,0 pts.) Demuestre que  $[(0, 0)]_{\mathcal{R}} = L$  y caracterice  $[(1, 1)]_{\mathcal{R}}$ .

**P3.** (i) (1,5 pts.) Sea  $a_1 = 1$ ,  $a_2 = 2$  y  $a_n = \sum_{i=1}^{n-1} a_i$ ,  $\forall n \geq 3$ . Demuestre que  $a_n = 3 \cdot 2^{n-3}$ ,  $\forall n \geq 3$ .

(ii) (1,5 pts.) Dado  $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ , Calcule la suma  $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \frac{x^k}{k+1}$ .

**P4.** (3,0 pts.) Considere los conjuntos  $S_1 = \{3k : k \in \mathbb{Z}\}$  y  $S_2 = \{2p : p \in \mathbb{Z}\}$ . Verifique que  $(S_1, +)$  y  $(S_2, +)$  son subgrupos del grupo  $(\mathbb{Z}, +)$ , donde  $+$  es la suma habitual de  $\mathbb{Z}$ . Determine si  $(S_1 \cup S_2, +)$  es subgrupo de  $(\mathbb{Z}, +)$ .

**P5.** (i) (1,5 pts.) Considere  $z \in \mathbb{C}$ . Demuestre que  $|z + i| = |z - i| \Leftrightarrow z \in \mathbb{R}$ .

(ii) (1,5 pts.) Sea  $z = \left( \frac{1+i\sqrt{3}}{1-i} \right)^{60}$ . Determine  $|z|$ ,  $\arg(z)$ ,  $\text{Re}(z)$  e  $\text{Im}(z)$ .

**P6.** Sabiendo que el polinomio  $p \in \mathbb{C}[x]$  dado por

$$p(z) = 2z^3 - (5 + 6i)z^2 + 9iz + 1 - 3i$$

admite una raíz  $a \in \mathbb{R}$ , determine **todas** las raíces de  $p$ .

**Indicación:** Estudie la parte real e imaginaria de  $p(a)$ .

15 de julio de 2008  
Sin consultas  
Tiempo: 3:00 hrs.