

Introducción al Álgebra (MA 1101)

EXAMEN Pauta Problema 1

i) $p(x) = x^7 + 2x^5 - x^4 + x^3 - 2x^2 - 1$ y $x=i$ es raíz doble.

Entonces $x=-i$ también es raíz doble pues $p(x) \in \mathbb{R}[x]$

y ni z es raíz de p también \bar{z} es raíz (Teorema)

Que $p(x)$ es divisible por $(x+i)^2(x-i)^2 = [(x+i)(x-i)]^2 = (x^2+1)^2 = x^4+2x^2+1$

1.5 \rightarrow

$$\begin{array}{r} \cancel{x^7 + 2x^5 - x^4 + x^3 - 2x^2 - 1} : (x^4 + 2x^2 + 1) = x^3 - 1 \\ \underline{x^7 + 2x^5 + x^3} \\ -x^4 - 2x^2 - 1 \\ \underline{-x^4 - 2x^2 - 1} \\ 0 \end{array}$$

1.0 Que $p(x) = x^7 + 2x^5 - x^4 + x^3 - 2x^2 - 1 = (x^4 + 2x^2 + 1)(x^3 - 1)$

Las tres raíces restantes de $p(x)$ son raíces de $x^3 - 1 = 0$
 es decir $(x-1)(x^2+x+1) = 0$ y por $x=1 \wedge x = \frac{-1 \pm \sqrt{-3}}{2} = -\frac{1}{2} \pm i\frac{\sqrt{3}}{2}$

1.5 Que, las raíces de $p(x)$ son: $\{i(\text{doble}), -i(\text{doble}), 1, -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\}$

ii) Por factorizar en $\mathbb{R}[x]$ queda

$$p(x) = (x^4 + 2x^2 + 1)(x-1)(x^2 + x + 1)$$

1.0 \rightarrow Factorizar en $\mathbb{C}[x]$

1.0 \rightarrow

$$p(x) = (x+i)^2(x-i)^2(x-1)\left(x - \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(x - \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

Pauta Problema 2

a) Si $\sum_{k=1}^n a_k = \frac{1}{3}(n^2 + 5n)$, determinar a_n

$\textcircled{0.5} \rightarrow$ a_n puede calcularse como $a_n = \sum_{k=1}^n a_k - \sum_{k=1}^{n-1} a_k$
 donde $\sum_{k=1}^{n-1} a_k = \frac{1}{3}((n-1)^2 + 5(n-1)) = \frac{1}{3}(n^2 + 3n - 4)$

Segue que $a_n = \frac{1}{3}(n^2 + 5n) - \frac{1}{3}(n^2 + 3n - 4) = \frac{1}{3}(2n + 4)$

$\textcircled{1.5} \rightarrow$ así $a_n = \frac{2}{3}(n + 2)$

b) Sea $b_k = \frac{1}{k!}$. Calcular $\sum_{k=0}^n (b_k - b_{k+2})$

$\textcircled{0.5} \rightarrow$ Se puede completar $\sum_{k=0}^n (b_k - b_{k+2}) = \sum_{k=0}^n (b_k - b_{k+1} + b_{k+1} - b_{k+2})$
 $= \sum_{k=0}^n (b_k - b_{k+1}) + \sum_{k=0}^n (b_{k+1} - b_{k+2})$ ambas telescópicas

$= (b_0 - b_{n+1}) + (b_1 - b_{n+2}) = \frac{1}{0!} - \frac{1}{(n+1)!} + \frac{1}{1!} - \frac{1}{(n+2)!}$

$\textcircled{1.5} \rightarrow = 1 - \frac{1}{(n+1)!} + 1 - \frac{1}{(n+2)!} = 2 - \frac{1}{(n+1)!} \left[1 + \frac{1}{n+2} \right] = 2 - \frac{n+3}{(n+2)!}$

c) Calcular en función de n $\sum_{k=0}^n \frac{n!}{(n-k)!} \left[\sum_{i=0}^k \frac{\binom{k}{i}}{k!} \right]$

$\sum_{k=0}^n \frac{n!}{(n-k)!} \left(\sum_{i=0}^k \frac{\binom{k}{i}}{k!} \right) = \sum_{k=0}^n \frac{n!}{(n-k)! k!} \left(\sum_{i=0}^k \binom{k}{i} \right) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} 2^k =$
 binomio

$\textcircled{2.0} \rightarrow = (2+1)^n = 3^n$

Pauta Problema 3

- i) z es raíz n -ésima de la unidad, $n \in \mathbb{N}$, es decir $z^n = 1$
 y w es raíz m -ésima de la unidad, $m \in \mathbb{N}$, es decir $w^m = 1$
 $z \cdot w$ será raíz k -ésima de la unidad si $\exists k \in \mathbb{N}$ tal que

(0.5) $(zw)^k = 1$

Se puede escribir $(z \cdot w)^{m \cdot n} = (z)^{m \cdot n} \cdot w^{m \cdot n} = (z^n)^m \cdot (w^m)^n$
 $= 1^m \cdot 1^n = 1 \cdot 1 = 1$

- (1.5) Entonces con $k = m \cdot n \in \mathbb{N}$, $(zw)^k = 1$, es decir $z \cdot w$ es raíz k -ésima de la unidad

ii) $G = \{ w \in \mathbb{C} / \exists m \in \mathbb{N}, m \geq 2, w^m = 1 \}$

Probar que (G, \cdot) es subgrupo de $(\mathbb{C} - \{0\}, \cdot)$

Usando la propiedad compacta, G es subgrupo de $\mathbb{C} - \{0\}$

si $G \neq \emptyset$ y si $\forall g_1, g_2 \in G \Rightarrow g_1 \cdot g_2^{-1} \in G$

(0.5) En efecto, $G \neq \emptyset$ pues al menos $1 \in G$ ($1^n = 1 \forall n$)

y, sean $g_1, g_2 \in G$, entonces $\exists m_1, m_2 \in \mathbb{N}$ tales que $g_1^{m_1} = 1$ y $g_2^{m_2} = 1$

(1.5) $(g_2^{-1})^{m_2} = \frac{1}{g_2^{m_2}} = \frac{1}{1} = 1$. Entonces $(g_1, g_2^{-1})^{m_1 m_2} = (g_1^{m_1})^{m_2} (g_2^{-1})^{m_1 m_2} = 1 \cdot 1 = 1$

(1.5) es decir, $\exists k = m_1 m_2 \in \mathbb{N}$ tal que $(g_1 g_2^{-1})^k = 1 \Rightarrow g_1 g_2^{-1} \in G$

iii) Probar que $\varphi: (G, \cdot) \rightarrow (G, \cdot)$ tal que $\varphi(w) = \frac{1}{w}$ es un isomorfismo.

$\Rightarrow \varphi$ es biyectiva en inversa $\varphi^{-1} = \varphi$ pues $(\varphi \circ \varphi^{-1})(w) = \varphi(\varphi^{-1}(w)) = \varphi(\frac{1}{w}) = w$

es decir $\varphi \circ \varphi^{-1} = \text{id}_G$.

(1.0) También puede probarse INYECTIVIDAD $\varphi(w_1) = \varphi(w_2) \Rightarrow \frac{1}{w_1} = \frac{1}{w_2} \Rightarrow w_1 = w_2$

y Sobreyectividad $\forall w \in G, \exists \frac{1}{w} \in G$ tal que $\varphi(\frac{1}{w}) = w$

(1.0) Morfismo: Para $w, z \in G \rightarrow \varphi(w \cdot z) = \frac{1}{wz} = \frac{1}{w} \cdot \frac{1}{z} = \varphi(w) \cdot \varphi(z)$
 Según (i) $(wz) \in G$