

# Examen Introducción al Álgebra

## Puntos Problemas 1

a) Pr dem. q':  $(G, *)$  es grupo abeliano donde  $G = \{x \in \mathbb{R} / x > 1\}$   
 $y *$  es l.e.i. definido por  $x * y = xy - x - y + 2$

$\therefore *$  es asociativa:  $(x * y) * z = (xy - x - y + 2) * z =$   
 $= (xy - x - y + 2)z - (xy - x - y + 2) - z + 2 = xyz - xz - yz - xy + x + y + 2z - xy + x + y + 2$

0.7  $= x * (y * z) \quad \forall x, y, z \in G.$

0.3  $\therefore *$  es conmutativa: Es inmediato  $x * y = xy - x - y + 2 = yx - y - x + 2 = y * x$

$\therefore$  Neutro  $e$ :  $x * e = x \Rightarrow xe - x - e + 2 = x \Rightarrow e(x-1) = 2(x-1)$  por  $x \neq 1$

0.5 Asi  $e = 2 > 1, e \in G$

$\therefore$  Simétricos:  $x * x^{-1} = x \cdot x^{-1} - x - x^{-1} + 2 = e = 2$

$\Rightarrow x^{-1}(x-1) = x \Rightarrow x^{-1} = \frac{x}{x-1} \in G \left( \frac{x}{x-1} > 1 \right)$

es decir todo  $x \in G$  es simetrizable.

1.5  $\rightarrow$  Entonces  $(G, *)$  es grupo Abeliano.

b) Probar que  $(G, *)$  es isomorfo a  $(\mathbb{R}^+, \cdot)$

En efecto,  $f: G \rightarrow \mathbb{R}^+$  definida por  $f(x) = x-1 \quad \forall x \in G$

0.5 es biyectiva (es una recta de pendiente no nula)

Además  $\forall x, y \in G$   $f(x * y) = x * y - 1 = xy - x - y + 2 - 1 = xy - x - y + 1$

1.0  $= (x-1)(y-1) = f(x) \cdot f(y) \therefore f$  es un morfismo.

c)  $H = \{q \in \mathbb{Q} / q > 1\}$ . Demostrar que  $(H, *)$  es subgrupo de  $(G, *)$

0.5  $\rightarrow$  En efecto, sean  $q_1, q_2 \in H$  donde  $q_2^{-1} = \frac{q_2}{q_2-1}$ . Pr dem. q':  $q_1 * q_2^{-1} \in H$

$q_1 * q_2^{-1} = q_1 * \frac{q_2}{q_2-1} = q_1 \cdot \frac{q_2}{q_2-1} - q_1 - \frac{q_2}{q_2-1} + 2 = \frac{q_1 q_2}{q_2-1} - (q_1-1) - \frac{q_2}{q_2-1} + 1 =$

1.0  $= \left[ \frac{q_1 q_2}{q_2-1} - 1 \right] (q_1-1) + 1 = \frac{q_1-1}{q_2-1} + 1$  donde  $\left( \frac{q_1-1}{q_2-1} + 1 \right) \in \mathbb{Q}$  y  $\frac{q_1-1}{q_2-1} + 1 > 1$   
 Asi:  $q_1 * q_2^{-1} \in H$



## Prentice Problem 2

i)  $z \in \mathbb{C}, z \neq 0 \quad \left(z + \frac{1}{z}\right) \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \operatorname{Im}(z) = 0 \vee |z| = 1$

Dém ( $\Leftarrow$ ) Si  $\operatorname{Im}(z) = 0 \rightarrow z \in \mathbb{R} (z \neq 0) \Rightarrow z, \frac{1}{z} \in \mathbb{R} \Rightarrow \left(z + \frac{1}{z}\right) \in \mathbb{R}$

0.5) Or bien si  $|z| = 1$ ,  $z + \frac{1}{z} = z + \frac{\bar{z}}{z\bar{z}} = z + \frac{\bar{z}}{|z|^2} = (z + \bar{z}) \in \mathbb{R}$ .

( $\Rightarrow$ )  $\left(z + \frac{1}{z}\right) \in \mathbb{R} \Rightarrow \operatorname{Im}\left(z + \frac{1}{z}\right) = 0 \Rightarrow \frac{1}{2i} \left[ \left(z + \frac{1}{z}\right) - \overline{\left(z + \frac{1}{z}\right)} \right] = 0$

$\Rightarrow \frac{1}{2i} \left[ z - \bar{z} + \frac{1}{z} - \frac{1}{\bar{z}} \right] = \frac{1}{2i} \left[ z - \bar{z} - \frac{z - \bar{z}}{z\bar{z}} \right] = \frac{z - \bar{z}}{2i} \left[ 1 - \frac{1}{|z|^2} \right] = 0$

1.0  $\rightarrow$

2.5) Or si  $z - \bar{z} = 0 \vee |z|^2 = 1 \Rightarrow z = \bar{z} \vee |z| = 1 \Rightarrow \operatorname{Im}(z) = 0 \vee |z| = 1$

ii)  $1+i$  est racine de  $x^5 + ax^3 + b = 0$  donc  $1+i = \sqrt{2} e^{i\pi/4}$

0.5) Soit que  $(\sqrt{2} e^{i\pi/4})^5 + a(\sqrt{2} e^{i\pi/4})^3 + b = 0 \Rightarrow (\sqrt{2})^5 e^{i5\pi/4} + a(\sqrt{2})^3 e^{i3\pi/4} + b = 0$

$\Rightarrow (\sqrt{2})^5 \left( \cos \frac{5\pi}{4} + i \sin \frac{5\pi}{4} \right) + a(\sqrt{2})^3 \left( \cos \frac{3\pi}{4} + i \sin \frac{3\pi}{4} \right) + b = 0$

$\Rightarrow (\sqrt{2})^5 \left( -\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2} \right) + a(\sqrt{2})^3 \left( -\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2} \right) + b = 0$

$\Rightarrow 4(-1-i) + 2a(-1+i) + b = 0 \Rightarrow \begin{cases} -4-20+b=0 \\ -4+2a=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=2 \\ b=8 \end{cases}$

1.5  $\rightarrow$

$\Rightarrow (-4-2a+b) + (-4+2a)i = 0 \Rightarrow$

iii) Résoudre  $z^3 + i = 0$ ,  $z^3 = -i$  donc  $-i = 1 \cdot e^{i(-\pi/2)}$

0.5) Entons les racines par  $z_k = \sqrt[3]{1} \cdot e^{i \frac{2k\pi - \pi/2}{3}}$ ,  $k = 0, 1, 2$ .

Or,  $z_0 = e^{i(-\pi/6)} = \cos \frac{\pi}{6} - i \sin \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i$

$z_1 = e^{i \frac{2\pi - \pi/2}{3}} = e^{i\pi/2} = \cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2} = i$

1.5  $\rightarrow$

$z_2 = e^{i \frac{4\pi - \pi/2}{3}} = \cos \frac{7\pi}{6} + i \sin \frac{7\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i$



# Pauta Problema 3

a)  $p(x) = x^5 - 5x^4 + 14x^3 - 14x^2 + 13x - 9$

Claramente  $p \in \mathbb{R}[x]$  y  $x=i$  es uno de sus raíces, entonces  $x=-i$  también lo es. Además las raíces enteras de  $p$  pueden ser  $\pm 1, \pm 3$  y  $\pm 9$  y es fácil ver que  $x=1$  es raíz.

(1.0) Así,  $p$  es divisible por  $(x+i)(x-i)(x-1) = (x^2+1)(x-1) = x^3 - x^2 + x - 1$

Entonces  $(x^5 - 5x^4 + 14x^3 - 14x^2 + 13x - 9) : (x^3 - x^2 + x - 1) = x^2 - 4x + 9$

$$\begin{array}{r} x^5 - x^4 + x^3 - x^2 \\ \hline -4x^4 + 13x^3 - 13x^2 + 13x - 9 \\ -4x^4 + 4x^3 - 4x^2 + 4x \\ \hline 9x^3 - 9x^2 + 9x - 9 \\ 9x^3 - 9x^2 + 9x - 9 \\ \hline 0 \end{array}$$

(1.0)

Segue que las raíces restantes son raíces de  $x^2 - 4x + 9 = 0$

$\Rightarrow x = \frac{4 \pm \sqrt{16-36}}{2} = \frac{4 \pm 2\sqrt{5}i}{2} \rightarrow \begin{matrix} 2 + \sqrt{5}i \\ 2 - \sqrt{5}i \end{matrix}$  obteniendo  $\begin{matrix} x_1 = i \\ x_2 = -i \\ x_3 = 1 \end{matrix}$

(0.5)

Así,  $p(x) = (x-1)(x+i)(x-i)(x-2-\sqrt{5}i)(x-2+\sqrt{5}i)$  en  $\mathbb{C}$

(0.5)

$p(x) = (x-1)(x^2+1)(x^2-4x+9)$  en  $\mathbb{R}$ .

b)  $\varphi: \mathbb{R}[x] \rightarrow \mathbb{R}; \varphi(p(x)) = p(a)$

b1) Morfismos  $\begin{cases} \varphi(p+q) = (p+q)(a) = p(a) + q(a) = \varphi(p(x)) + \varphi(q(x)) \\ \varphi(p \cdot q) = (p \cdot q)(a) = p(a)q(a) = \varphi(p(x)) \cdot \varphi(q(x)) \end{cases}$

(0.8)

Para la epimorfismo basta tomar  $\forall c \in \mathbb{R}, p(x) \in \mathbb{R}[x]$  tal que  $p(x) = c^x = c$

(0.7)

y así se tiene  $\varphi(p(x)) = p(a) = c$ .

b2) Probar que  $\varphi^{-1}(\{0\}) = \{(x-a)q(x) | q(x) \in \mathbb{R}[x]\}$ .

En efecto, sea  $p \in \varphi^{-1}(\{0\}) \Leftrightarrow \varphi(p(x)) = p(a) = 0 \Leftrightarrow a$  es raíz de  $p \Leftrightarrow (x-a) | p(x)$

(1.5)

$\Rightarrow \exists q(x) \in \mathbb{R}[x]: p(x) = (x-a)q(x)$