



Examen

P1. a) (2,0 pts.) Determine si las siguientes funciones son biyectivas, y encuentre la inversa en el caso que existe:

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}, f(x) = ix^4$$

$$g: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+, g(x) = \frac{1}{17x}$$

$$h: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}, h(z) = 3i(\bar{z} + 1)$$

b) (2,0 pto.) Escribe el complejo $z = \left| \frac{i}{1-i} \right| e^{i\frac{\pi}{4}}$ en forma cartesiana.

c) (2,0 pts.) Definimos $z \sim w$ para $z, w \in \mathbb{C}$ si existe un $n \in \mathbb{N}$ tal que $n \leq \min\{|z|, |w|\}$ y $\max\{|z|, |w|\} < n + 1$. Muestre que \sim es una relación de equivalencia. Dibuje la clase de equivalencia del complejo $3 - i$ en el plano complejo. Demuestre que el conjunto cociente \mathbb{C}/\sim es igual al conjunto $\{[ki]_{\sim} | k \in \mathbb{N}\}$.

P2. Sea $p \in \mathbb{N}_+$ primo durante toda la pregunta. En cada una de las partes a)-d), se pueden usar las partes anteriores.

a) (1,0 pto.) Sea $k \in \mathbb{N}$ con $k < p$. Demuestre que $\frac{(p-1)!}{(p-k)!k!} \in \mathbb{N}$.

b) (2,5 pts.) Sean $a, b \in \mathbb{Z}$. Demuestre que $(a + b)^p \equiv_p a^p + b^p$. (Se recomienda usar el teorema del binomio.)

Indicación: Recuerde que $n \equiv_p m \Leftrightarrow \exists d \in \mathbb{Z}$ tal que $n - m = dp$.

c) (1,5 pts.) Conocemos el grupo $(\mathbb{Z}_p, +_p)$. Considere ahora la estructura algebraica (\mathbb{Z}_p, \star) , donde \star es definido como $a \star b = (a +_p b)^p$. Demuestre que $f: (\mathbb{Z}_p, +_p) \rightarrow (\mathbb{Z}_p, \star)$ dado por $f(a) = a^p$ es un homomorfismo.

d) (1,0 pto.) Determine el inverso (con respecto a la adición) de $(-a)^p$ en $(\mathbb{Z}_p, +_p)$.

P3. a) (2,0 pts.) Pruebe que $\sum_{k=1}^n k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$ para todo $n \in \mathbb{N}_+$.

b) (2,0 pts.) Demuestre que el polinomio

$$p(x) = \sum_{j=1}^6 \frac{(-1)^j}{(j+1)^2} \left(\sum_{k=1}^j 4k^3 x^{j-1} \right)$$

es igual a

$$36x^5 - 25x^4 + 16x^3 - 9x^2 + 4x - 1$$

y decida si $p(x)$ tiene raíces enteras. (Se puede usar la parte a).

c) (2,0 pts.) Sea $q(x) = 30x^5 - 30x^2 + 22x - 1$ y $r(x) = p(x) - q(x)$. Sabiendo que $r(x)$ admite 3 raíces enteras no negativas factorice $r(x)$.

Indicación: Puede usar el método de Horner.

04 de diciembre de 2009

Sin consultas

Tiempo: 3:00