

Examen ALGEBRA (MA1101) (2013-1)

Punto Problema 1

$K = \{a + b\sqrt{2} \mid a, b \in \mathbb{Q}\}$ para $z = a + b\sqrt{2} \in K$ se define $\hat{z} = a - b\sqrt{2}$

a) mostrar que $\forall \alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{Q}$

$$\alpha + \beta\sqrt{2} = \gamma + \delta\sqrt{2} \Leftrightarrow \alpha = \gamma \wedge \beta = \delta$$

0.1) (\Leftarrow) Es inmediato que si $\alpha = \gamma \wedge \beta = \delta \Rightarrow \alpha + \beta\sqrt{2} = \gamma + \delta\sqrt{2}$
 (\Rightarrow) Sea $\alpha + \beta\sqrt{2} = \gamma + \delta\sqrt{2} \Rightarrow \alpha - \gamma = (\delta - \beta)\sqrt{2}$

$$\text{cm } (\alpha - \gamma) \in \mathbb{Q} \text{ y } (\delta - \beta) \in \mathbb{Q}$$

Si $\delta - \beta \neq 0$ entonces $\sqrt{2} \in \mathbb{Q}$ lo que es una contradicción

0.4) Sigue que $\alpha - \gamma = 0 \wedge \delta - \beta = 0 \Rightarrow \alpha = \gamma \wedge \beta = \delta$.

b) Dado $z \in K$, mostrar que $z \in \mathbb{Q} \Leftrightarrow z = \hat{z}$

En efecto (\Rightarrow) Si $z = (a + b\sqrt{2}) \in \mathbb{Q} \Rightarrow b\sqrt{2} \in \mathbb{Q}$ de donde $\sqrt{2} \in \mathbb{Q}$ ^{si b ≠ 0} \rightarrow "no"

0.3) Sigue que $b = 0$ y $z = a + 0\sqrt{2} = a - 0\sqrt{2} = \hat{z}$

0.2) (\Leftarrow) Recíprocamente, si $z = \hat{z} \Rightarrow a + b\sqrt{2} = a - b\sqrt{2} \Rightarrow b\sqrt{2} = 0$
 $\Rightarrow b = 0$. Sigue que $z = a \in \mathbb{Q}$

c) Demostrar que $f: (K, +, \cdot) \rightarrow (K, +, \cdot)$ (+ y · son suma y producto habituales) dado por $f(z) = \hat{z}$, es un isomorfismo.

f es sobreyectivo pues $\forall (a + b\sqrt{2}) \in K$ basta tomar $(a - b\sqrt{2}) \in K$ y se tiene que $f(a - b\sqrt{2}) = a + b\sqrt{2}$

f es inyectiva pues si $f(a_1 + b_1\sqrt{2}) = f(a_2 + b_2\sqrt{2}) \Rightarrow$
 $a_1 - b_1\sqrt{2} = a_2 - b_2\sqrt{2}$ y según (a) $a_1 = a_2 \wedge b_1 = b_2$ de donde

$$0.4) \quad a_1 + b_1\sqrt{2} = a_2 + b_2\sqrt{2}$$

Morfismo Aditivo: $f[(a + b\sqrt{2}) + (c + d\sqrt{2})] = f[(a + c) + (b + d)\sqrt{2}] =$

$$0.2) \quad = (a + c) - (b + d)\sqrt{2} = (a - b\sqrt{2}) + (c - d\sqrt{2}) = f(a + b\sqrt{2}) + f(c + d\sqrt{2})$$

Monotismo Multiplicativo

$$f[(a+b\sqrt{2})(c+d\sqrt{2})] = f[(ac+2bd) + (ad+bc)\sqrt{2}] = ac+2bd - (ad+bc)\sqrt{2} =$$

$$\textcircled{0.4} = (a-b\sqrt{2})(c-d\sqrt{2}) = f(a+b\sqrt{2}) \cdot f(c+d\sqrt{2})$$

d) Sea $p(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n \in \mathbb{Q}[x]$ un polinomio en coeficientes en \mathbb{Q} . Probar que:

i) $\forall z \in K \quad \widehat{f(z)} = p(\widehat{z})$

$$p(z) = \sum_{i=0}^n a_i z^i \Rightarrow \widehat{p(z)} = \sum_{i=0}^n \widehat{a_i z^i}$$

$$= \sum_{i=0}^n \widehat{a_i} \widehat{z^i} \quad (\text{por isotomismo pero } +)$$

$$= \sum_{i=0}^n \widehat{a_i} \widehat{z}^i \quad (\text{por isotomismo pero } \cdot)$$

$$= \sum_{i=0}^n \widehat{a_i} (\widehat{z})^i \quad (\widehat{z^i} = (\widehat{z})^i \text{ por isotomismo } \cdot)$$

$\textcircled{10} \rightarrow$

$\textcircled{0.5} \rightarrow$ como $a_i \in \mathbb{Q}, \widehat{a_i} = a_i \Rightarrow \sum_{i=0}^n a_i (\widehat{z})^i = p(\widehat{z})$

ii) Si $z \in K$ es raíz de p , entonces \widehat{z} también es raíz de p .
Según d)(i) es inmediato pues $p(\widehat{z}) = \widehat{p(z)}$ pero $p(z) = 0$

$$\Rightarrow p(\widehat{z}) = \widehat{0} \text{ y } 0 \in \mathbb{Q}, \text{ es decir } \widehat{0} = 0 \Rightarrow p(\widehat{z}) = 0$$

$\textcircled{1.0} \rightarrow$ Sigue que \widehat{z} es también raíz de p

iii) Si $\deg(p) = 3$ y p tiene al menos una raíz en K , entonces p tiene al menos una raíz en \mathbb{Q} .

Sea $p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3, a_0, a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{Q}$ y $z = a+b\sqrt{2}$ raíz de p . Entonces, $a-b\sqrt{2}$ es también raíz de p y puede escribirse (Teo. Fundamental)

$\textcircled{1.0} \quad p(x) = a_3(x - (a+b\sqrt{2}))(x - (a-b\sqrt{2}))(x - x_0)$ donde los coeficientes son en \mathbb{Q} ,
 $\textcircled{0.5}$ En particular el término libre $-a_3(a^2 - 2b^2)x_0 \in \mathbb{Q} \Rightarrow x_0 \in \mathbb{Q}$

Pronto Problema 2

a) i) Las raíces de $x^2 + x + 1 = 0$ son $x = \frac{-1 \pm \sqrt{1-4}}{2} = -\frac{1}{2} \pm i \frac{\sqrt{3}}{2}$

$$x_1 = -\frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2} = e^{i \frac{2\pi}{3}} \quad \wedge \quad x_2 = -\frac{1}{2} - i \frac{\sqrt{3}}{2} = e^{i \frac{4\pi}{3}}$$

Claramente $x_1^3 = (e^{i \frac{2\pi}{3}})^3 = e^{2\pi i} = 1 \quad \wedge \quad x_2^3 = (e^{i \frac{4\pi}{3}})^3 = e^{4\pi i} = 1$

(1.5) \Rightarrow Qui x_1, x_2 son raíces cúbicas de la unidad.

ii) $q(x) = x^2 + x + 1$ es divisor de $p(x) = x^{3n_1} + x^{3n_2+1} + x^{3n_3+2}$, $n_1, n_2, n_3 \in \mathbb{Z}$

$\Rightarrow q(x)$ será divisor de $p(x)$ si sus raíces son también raíces de $p(x)$

En efecto, para $x_1 = e^{i \frac{2\pi}{3}}$: $p(x_1) = x_1^{3n_1} + x_1^{3n_2+1} + x_1^{3n_3+2}$

$$= (e^{i \frac{2\pi}{3}})^{3n_1} + (e^{i \frac{2\pi}{3}})^{3n_2+1} + (e^{i \frac{2\pi}{3}})^{3n_3+2} = \underbrace{e^{2\pi n_1 i}}_1 + \underbrace{e^{2\pi n_2 i}}_1 x_1 + \underbrace{e^{2\pi n_3 i}}_1 x_1^2$$

(1.0) $\Rightarrow p(x_1) = 1 + x_1 + x_1^2 = q(x_1) = 0$

Para x_2 , basta observar que $x_2 = \bar{x}_1$ y como $p \in \mathbb{R}[x]$

y $p(x) = 0 \Rightarrow p(\bar{x}) = p(x_2) = 0$

Qui, x_1, x_2 son raíces de $p(x) \Rightarrow (x-x_1)(x-x_2) \mid p(x)$

(0.5) $\Rightarrow (x^2 + x + 1) \mid p(x) \Rightarrow q(x) \mid p(x)$

b) Se define en $\mathbb{C} - \{0\}$ R por $z_1 R z_2 \Leftrightarrow z_1 \bar{z}_2 \in \mathbb{R}$

i) R es relación de equivalencia.

(0.5) Ejemplos. Reflexiva $\Leftrightarrow \forall z \in \mathbb{C} - \{0\}, z R z \Leftrightarrow z \bar{z} = |z|^2 \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \forall$

Simétrica: Sean z_1, z_2 ; $z_1 R z_2 \Leftrightarrow z_1 \bar{z}_2 \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \overline{z_1 \bar{z}_2} \in \mathbb{R} \Rightarrow \bar{z}_1 z_2 \in \mathbb{R}$

(0.5) \Rightarrow de donde $z_2 R z_1$

Transitiva: Sean z_1, z_2, z_3 ; $z_1 R z_2 \wedge z_2 R z_3 \Leftrightarrow z_1 \bar{z}_2 \in \mathbb{R} \wedge z_2 \bar{z}_3 \in \mathbb{R} \Rightarrow$

(1.0) $z_1 \bar{z}_2 z_2 \bar{z}_3 \in \mathbb{R} \Rightarrow (z_1 \bar{z}_3) |z_2|^2 \in \mathbb{R} \Rightarrow z_1 \bar{z}_3 \in \mathbb{R}$ pues $|z_2|^2 \in \mathbb{R} \Rightarrow z_1 R z_3$

ii) $[z]_R = \{w \in \mathbb{C} - \{0\} \mid w R z\} = \{w \in \mathbb{C} - \{0\} \mid w \bar{z} \in \mathbb{R}\}$ o bien $w \bar{z} = r \in \mathbb{R} \Rightarrow$

(1.0) $\Rightarrow w \bar{z} z = r \cdot z \Rightarrow w |z|^2 = r z \Rightarrow w = \frac{r}{|z|^2} z$ con $\frac{r}{|z|^2} = r \neq 0 \in \mathbb{R}$. Qui $[z]_R = \{ \lambda z \mid \lambda \in \mathbb{R} \}$

Para Problema 3

a) Se sabe que $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} = 2^n \sim \sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k} = 0$ (B. Newton)

$$\text{Así, } \sum_{j=0}^{2^m} \binom{2^m}{j} = 2^{2^m} \quad \text{y} \quad \sum_{j=0}^{2^m} (-1)^j \binom{2^m}{j} = 0$$

$$\text{Sumando } \sum_{j=0}^{2^m} \binom{2^m}{j} + \sum_{j=0}^{2^m} (-1)^j \binom{2^m}{j} = \sum_{j=0}^{2^m} \binom{2^m}{j} (1 + (-1)^j) = 2^{2^m}$$

(1.0) →

$$\text{y } 1 + (-1)^j = \begin{cases} 0 & \text{si } j \text{ impar} \\ 2 & \text{si } j \text{ par} \end{cases} \quad \text{cambiando } j = 2k$$

$$\text{queda } \sum_{k=0}^m \binom{2^m}{2k} \cdot 2 = 2^{2^m} \Rightarrow \sum_{k=0}^m \binom{2^m}{2k} = 2^{2^m-1}$$

(1.0) →

b) i) Probar por inducción que $a_n \leq \frac{1}{2^{n-1}}$, $\forall n \in \mathbb{N}$
 $a_0 = 1$, $a_{n+1} = \frac{a_n}{n+1}$

$$\text{Para } n=0, \quad a_0 = 1 \quad \text{y} \quad 1 \leq \frac{1}{2^{0-1}} = 2 \quad \checkmark$$

(0.5) Sea $a_n \leq \frac{1}{2^{n-1}}$ algún $n \in \mathbb{N}$

$$\text{P.d. q: } a_{n+1} \leq \frac{1}{2^n}. \quad \text{En efecto } a_{n+1} = \frac{a_n}{n+1} \stackrel{H.I.}{\leq} \frac{1}{2^{n-1}(n+1)}$$

$$(1.5) \text{ donde } \frac{1}{n+1} \leq \frac{1}{2} \quad \forall n \geq 1. \quad \text{Así } a_{n+1} \leq \frac{1}{2^{n-1} \cdot 2} = \frac{1}{2^n} //$$

ii) Probar que $\sum_{k=0}^n a_k < 3$.

$$\text{En efecto } \sum_{k=0}^n a_k = a_0 + \sum_{k=1}^n a_k \leq 1 + \sum_{k=1}^n \frac{1}{2^{k-1}} = 1 + \underbrace{\sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{2^k}}_{\text{Germétrico}}$$

$$(2.0) \Rightarrow 1 + \frac{1 - (\frac{1}{2})^n}{1 - 1/2} = 1 + 2 \underbrace{\left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n\right)}_{< 1} < 3 //$$