

Pauta Examen Algebra - MA 110

P1 Por demostrar que Ω es reflexiva, antisimétrica y Transitiva

Primero recordar que $\forall x \in \mathbb{N}, [x]_R \subseteq \mathbb{N}$ y $[x]_R \neq \emptyset$, de modo que $\forall x \in \mathbb{N}, \exists m \in \mathbb{N}$ tal que $m = \min [x]_R$

$\therefore \Omega$ es reflexiva pues $\forall [x]_R \in \mathbb{N}/R$

0.5 $[x]_R \Omega [x]_R \Leftrightarrow m \leq m \Leftrightarrow V$

$\therefore \Omega$ es antisimétrica. Sean $[x]_R, [y]_R \in \mathbb{N}/R$ tales que $[x]_R \Omega [y]_R \wedge [y]_R \Omega [x]_R \Leftrightarrow m \leq n \wedge n \leq m \Rightarrow m = n$ en que $m = \min [x]_R$. Sigue que $m \in [x]_R \cap [y]_R \neq \emptyset$ de $[x]_R = [y]_R$ y por lo tanto Ω es antisimétrica.

\therefore La transitividad es directa de

$[x]_R \Omega [y]_R \wedge [y]_R \Omega [z]_R \Leftrightarrow m \leq n \wedge n \leq p$ donde $p = \min [z]_R$

Sigue que $m \leq p \Rightarrow [x]_R \Omega [z]_R$

Se concluye que Ω es relación de Orden

El orden Ω es total pues $\forall [x]_R, [y]_R \in \mathbb{N}/R$

$\Rightarrow m \leq n \vee n \leq m \Rightarrow [x]_R \Omega [y]_R \vee [y]_R \Omega [x]_R$

P2 a) Recordar que $\forall P, Q \in K[x], \exists S, R \in K[x]; P = Q \cdot S + R, \text{ y } R <_D Q$

Eni, $P(x)$ puede escribirse como $P(x) = (x-a) S(x)$ pues a es raíz de P
Para $b \neq a$ se cumple $P(b) = (b-a) S(b) = 0$ ya que b es también raíz de P .

Entonces $S(b) = 0$, es decir b es raíz de $S(x) \Rightarrow S(x) = (x-b) S'(x)$

Reemplazando $P(x) = (x-a)(x-b) S'(x)$, es decir $(x-a)(x-b) / P(x)$

b) $P(x) = x^4 + px^3 + qx^2 - 18x - 12$ puede escribirse como

$P(x) = (x+1)(x+3) S(x) + \frac{R(x)}{2x+3}$ de donde

$P(1) = 1$ pues $P(1) = 1 + p + q - 18 - 12 \Rightarrow p + q = 6$ (1)

$P(3) = -3$ pues $P(3) = 81 + 27p + 9q + 54 - 12 \Rightarrow 3p + q = 14$ (2)

De las ecuaciones (1) y (2) se concluye $p = 4 \wedge q = -2$

OBS Alternativamente se puede efectuar la división de $P(x)$ por $(x+1)(x+3)$ y el resto, que depende de p y q identificándolo en $R(x) = 2x+3$

Pauta Examen Algebra - MA 110

P3 a) Se probará por inducción que $a_n \leq \frac{1}{2^{n-1}} \quad \forall n \in \mathbb{N}$

0.5 i) Para $n=0$ $a_0 \leq \frac{1}{2^{-1}} = 2$ que se cumple pues $a_0 = 1$

También se cumple por $a_1 \leq \frac{1}{2^{1-1}} = 1 \wedge a_1 = \frac{a_0}{1+1} = \frac{1}{2}$

0.5 ii) Sea $a_n \leq \frac{1}{2^{n-1}}$ algún $n \in \mathbb{N}$

1.0 iii) P.d.g' $a_{n+1} \leq \frac{1}{2^n}$
En efecto $a_{n+1} = \frac{a_n}{n+1} \stackrel{\text{hip}}{\leq} \frac{1/2^{n-1}}{n+1} \leq \frac{1/2^{n-1}}{1+1} = \frac{1}{2^n}$ q.e.d.

b) Por demostrar que $\sum_{k=0}^n a_k < 3 \quad \forall n \in \mathbb{N}$

En efecto $\sum_{k=0}^n a_k = \sum_{k=1}^n a_k + a_0 = 1 + \sum_{k=1}^n a_k \leq 1 + \sum_{k=1}^n \frac{1}{2^{k-1}}$

1.0 $\rightarrow = 1 + \underbrace{\frac{1 - (\frac{1}{2})^{n+1}}{1 - \frac{1}{2}}}_{\sum \text{geométrica}} = 1 + 2 \left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right) < 1 + 2 = 3$

P4 $f: E \rightarrow F \wedge g: F \rightarrow E$; $g \circ f = \text{id}_E$

i) f es inyectiva

Sean $x_1, x_2 \in E$, $f(x_1) = f(x_2)$ en $f(x_1), f(x_2) \in F$

1.5 En $g(f(x_1)) = g(f(x_2)) \Rightarrow (g \circ f)(x_1) = (g \circ f)(x_2) \Rightarrow \text{id}_E(x_1) = \text{id}_E(x_2)$
 $\Rightarrow x_1 = x_2$ Entonces f es inyectiva.

ii) g es sobreyectiva.

Por demostrar que $(\forall t \in E)(\exists y \in F); g(y) = t$

En efecto, sea $t \in E \Rightarrow f(t) \in F$ y $g(f(t)) = (g \circ f)(t) = \text{id}_E(t) = t$

1.5 De modo que basta tomar $y = f(t) \in F$ en lo cual $g(y) = t \in E$

Alternativa $g(F) \subseteq E \wedge f(E) \subseteq F \Rightarrow (g \circ f)(E) \subseteq g(F) \Rightarrow \text{id}_E(E) = E \subseteq g(F)$
o sea $g(F) \subseteq E \wedge E \subseteq g(F)$. Sigue que $g(F) = E \Rightarrow g$ es Sobreyectiva

Prueba Examen Álgebra - MA 110

P5

a) Para probar que $(\mathbb{R}, *, 0)$ es cuerpo, la mejor forma es probar que $(\mathbb{R}, *)$ es grupo abeliano, $(\mathbb{R} - \{0\}, \cdot)$ es grupo abeliano y distribuye en respecto a $*$.
 $(\mathbb{R}, *)$ es grupo abeliano. En efecto.
 $*$ es l.c.i asociativa pues $\forall x, y, z \in \mathbb{R}$

0.5

$$\begin{aligned} x * (y * z) &= \sqrt[3]{x^3 + (y * z)^3} = \sqrt[3]{x^3 + (\sqrt[3]{y^3 + z^3})^3} = \sqrt[3]{x^3 + (y^3 + z^3)} \\ &= \sqrt[3]{(x^3 + y^3) + z^3} = \sqrt[3]{(x * y)^3 + z^3} = (x * y) * z \end{aligned}$$

0.2

$*$ es conmutativa. $\forall x, y \in \mathbb{R}$

$$x * y = \sqrt[3]{x^3 + y^3} = \sqrt[3]{y^3 + x^3} = y * x$$

0.5

Neutro para $*$. $e \in \mathbb{R}, x \in \mathbb{R}$

$$e * x = \sqrt[3]{e^3 + x^3} = x \Rightarrow e^3 + x^3 = x^3 \Rightarrow e = 0 \in \mathbb{R} \text{ es neutro}$$

0.5

Inverso. $\forall x \in \mathbb{R}, \exists x' \in \mathbb{R}$ tal que

$$x * x' = e = 0 \Rightarrow \sqrt[3]{x^3 + (x')^3} = 0 \Rightarrow x' = -x \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

Así, $(\mathbb{R}, *)$ es grupo abeliano.

0.3

Además $(\mathbb{R} - \{0\}, \cdot)$ es grupo abeliano (según indicación)

Por último, para la distributividad.

0.5

$$\begin{aligned} x \cdot (y * z) &= x \cdot \sqrt[3]{y^3 + z^3} = \sqrt[3]{x^3 y^3 + x^3 z^3} = \sqrt[3]{(xy)^3 + (xz)^3} \\ &= (xy) * (xz) \end{aligned}$$

Segue que $(\mathbb{R}, *, \cdot)$ es cuerpo

b) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x^3$ es isomorfismo

Es inmediato que f es biyectiva.

0.5

Homomorfismos de $(\mathbb{R}, *)$ en $(\mathbb{R}, +)$ y de (\mathbb{R}, \cdot) en (\mathbb{R}, \cdot) $\forall x, y \in \mathbb{R}$

$$i) f(x * y) = (x * y)^3 = (\sqrt[3]{x^3 + y^3})^3 = x^3 + y^3 = f(x) + f(y)$$

$$ii) f(x \cdot y) = (x \cdot y)^3 = x^3 \cdot y^3 = f(x) \cdot f(y)$$

P6

a) Sea $z = \frac{(1+i)^5}{(1-i)^6}$ en $1+i = \sqrt{2} e^{i\pi/4}$; $1-i = \sqrt{2} e^{-i\pi/4}$

1.2

$$\text{Así } z = \frac{(\sqrt{2} e^{i\pi/4})^5}{(\sqrt{2} e^{-i\pi/4})^6} = \frac{1}{\sqrt{2}} e^{i(\frac{5\pi}{4} + \frac{6\pi}{4})} = \frac{1}{\sqrt{2}} e^{i\frac{11\pi}{4}} = \frac{1}{\sqrt{2}} e^{i(3\pi - \frac{\pi}{4})}$$

0.5

$$\text{Segue que } z = \frac{1}{\sqrt{2}} \left[\cos(3\pi - \frac{\pi}{4}) + i \sin(3\pi - \frac{\pi}{4}) \right] = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(-\frac{\sqrt{2}}{2} + i \frac{\sqrt{2}}{2} \right) = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i$$

$$\text{Entonces } \operatorname{Re}(z) = -1/2 \wedge \operatorname{Im}(z) = 1/2$$

b) $z^6 - 2iz^3 - 1 = 0$. Sea $\alpha = z^3 \Rightarrow \alpha^2 - 2i\alpha - 1 = 0$

0.5

$$\text{Así } \alpha = \frac{2i \pm \sqrt{4 + 4}}{2} = i \text{ (doble)}$$

$$\text{Entonces } z^3 = i \Rightarrow z^3 = e^{i\pi/2} \Rightarrow z_k = e^{i\frac{2k\pi + \pi/2}{3}} \quad \text{en } k=0, 1, 2$$

1.0

Segue que $z_0 = e^{i\pi/6} = \cos \pi/6 + i \sin \pi/6 = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$ raíz doble.
 $z_1 = e^{i5\pi/6} = e^{i(\pi - \pi/6)} = -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$ raíz doble.
 $z_2 = e^{i9\pi/6} = e^{i3\pi/2} = -i$ raíz doble.