



Examen

P1. Considere el polinomio $p(x) = x^7 + 2x^5 - x^4 + x^3 - 2x^2 - 1$.

- (i) (4,0 ptos.) Se sabe que $x = i$ es raíz de $p(x)$ con multiplicidad 2. Encuentre, justificando sus pasos, todas las raíces de $p(x)$.
- (ii) (2,0 ptos.) Factorice $p(x)$ en $\mathbb{R}[x]$ y en $\mathbb{C}[x]$.

P2. a) (2,0 ptos.) Si

$$\sum_{k=1}^n a_k = \frac{1}{3}(n^2 + 5n),$$

se pide determinar a_n .

b) (2,0 ptos.) Sea $b_k = \frac{1}{k!}$. Calcule

$$\sum_{k=0}^n (b_k - b_{k+2}).$$

c) (2,0 ptos.) Calcule, en función de n ,

$$\sum_{k=0}^n \frac{n!}{(n-k)!} \left[\sum_{i=0}^k \frac{\binom{k}{i}}{k!} \right].$$

- P3.**
- i) (2,0 ptos.) Sean $m, n \in \mathbb{N}$, $m, n \geq 2$. Pruebe que si z es raíz n -ésima de la unidad y w es raíz m -ésima de la unidad, entonces existe $k \in \mathbb{N}$, $k \geq 2$ tal que $z \cdot w$ es raíz k -ésima de la unidad.
 - ii) (2,0 ptos) Sea $G = \{w \in \mathbb{C} \mid \exists n \in \mathbb{N}, n \geq 2, w^n = 1\}$, es decir G es la unión, para $n \geq 2$, de las raíces n -ésimas de la unidad.
Pruebe que (G, \cdot) es subgrupo de $(\mathbb{C} \setminus \{0\}, \cdot)$ donde \cdot es la multiplicación habitual de \mathbb{C} .
 - iii) (2,0 ptos.) Pruebe que $\varphi : (G, \cdot) \rightarrow (G, \cdot)$, tal que $\varphi(w) = \frac{1}{w}$ es un isomorfismo.

Consultas sólo al auxiliar de control
Justifique cada uno de sus pasos
Tiempo: 3:00