

MA1101-7 Introducción al Álgebra**Profesores:** José Soto San Martín**Auxiliares:** Ilana Mergudich Thal**Fecha:** Miércoles 10 de Agosto

Auxiliar 14: Polinomios - Examen

P1. Determinar $p \in \mathbb{R}[x]$ un polinomio mónico de grado 3, que satisfaga las siguientes condiciones.

- $p(0) = p(2) = 0$
- El resto de dividir $p(x)$ por $(x - 1)$ es el mismo que el resto obtenido al dividir $p(x)$ por $(x - 3)$

P2. Resolver en $\mathbb{C}$ la ecuación $z^6 - 2iz^3 - 1 = 0$ indicando la multiplicidad de cada raíz.

P3. Sea $p(x) = 6x^5 - 25x^4 + 16x^3 + 21x^2 - 18x$. Sabiendo que p admite 3 raíces enteras no negativas, factorice p .

P4. Pruebe que:

$$p(x) = \sum_{j=1}^6 \frac{(-1)^j}{(j+1)^2} \left(\sum_{k=1}^j 4k^3 x^{j-1} \right) = 36x^5 - 25x^4 + 16x^3 - 9x^2 + 4x - 1$$

Además averigüe si tiene raíces enteras.

P5. Se define en $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ la relación $\mathcal{R}$ dada por $z_1 \mathcal{R} z_2 \Leftrightarrow z_1 \cdot \overline{z_2} \in \mathbb{R}$.

- a) Demuestre que $\mathcal{R}$ es una relación de equivalencia.
- b) Muestre que $[z]_{\mathcal{R}} = \{a \cdot z \mid a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}\}$.

P6. a) Sean $m, n \in \mathbb{N}$, $m, n \geq 2$. Pruebe que si z es raíz n -ésima de la unidad y w es raíz m -ésima de la unidad, entonces existe $k \in \mathbb{N}$, $k \geq 2$ tal que $z \cdot w$ es raíz k -ésima de la unidad.

b) Sea $G = \{w \in \mathbb{C} \mid \exists n \in \mathbb{N}, n \geq 2, w^n = 1\}$, es decir G es la unión para $n \geq 2$ de las raíces n -ésimas de la unidad. Pruebe que $(G, \cdot)$ es subgrupo de $(\mathbb{C} \setminus \{0\}, \cdot)$ donde $\cdot$ es la multiplicación habitual de $\mathbb{C}$.

c) Pruebe que $\varphi : (G, \cdot) \rightarrow (G, \cdot)$, tal que $\varphi(w) = \frac{1}{w}$ es un isomorfismo.