Determine los valores de $a, b \in \mathbb{R}$ tq

$$\frac{1}{a+bi} + \frac{2}{a-bi} = 1+i$$

(como tenemos $\frac{1}{a+bi} \Rightarrow a+bi \neq 0$)

RECORDEMOS QUE $z \cdot \bar{z} = |z|^2 \Rightarrow \frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{|z|^2}$

$$\frac{1}{a+bi} + \frac{2}{a-bi} = \frac{a-bi}{a^2+b^2} + \frac{2(a+bi)}{a^2+b^2} = 1+i$$

$$\Rightarrow a-bi+2a+2bi = (1+i)(a^2+b^2)$$

$$\Rightarrow 3a+bi = a^2+b^2+(a^2+b^2)i$$

PERFECTO! 1 ECUACIÓN Y 2 INCOGNITAS

Wait me falta 1 ecuación ¿?

NO LA IGUALDAD DE COMPLEJOS ES POR PARTES!

$$a+bi = c+di \Rightarrow \boxed{a=c} \wedge \boxed{b=d}$$

$$\Rightarrow 3a+bi = a^2+b^2+(a^2+b^2)i$$

$$\Rightarrow 3a = a^2+b^2 \quad (1)$$

$$b = a^2+b^2 \quad (2)$$

$$(1)+(2) \Rightarrow 3a = b \overset{(2)}{\Rightarrow} 3a = a^2+9a^2 \Rightarrow 3a = 10a^2$$

$$\Rightarrow \boxed{a = \frac{3}{10} \vee a = 0}$$

Caso 1: si $a=0$

$(2) \Rightarrow b = b^2 \Rightarrow b = 1 \vee b = 0$

Notemos que ninguno sirve pues si $b=1 \overset{(1)}{\Rightarrow} 0 = 1$

si $b=0 \Rightarrow a+bi = 0$

Caso 2: si $a = \frac{3}{10} \overset{(1)}{\Rightarrow} \frac{9}{10} = \frac{9}{100} + b^2 \Rightarrow b = \pm\sqrt{\frac{81}{100}} = \pm\frac{9}{10}$

pero por (2) $b > 0 \Rightarrow \boxed{b = \frac{9}{10}}$

finalmente $a+bi = \frac{3}{10} + \frac{9}{10}i$ //

Probe que el producto de las n-raices de la unidad es $(-1)^{n-1}$

Recordemos que una raiz es de la forma

$$e^{i\frac{2k\pi}{n}} \quad k \in \{0,1,\dots,n-1\}$$

$$\Rightarrow e^{i\frac{2\cdot 0\pi}{n}} \cdot e^{i\frac{2\cdot 1\pi}{n}} \cdot e^{i\frac{2\cdot 2\pi}{n}} \cdots e^{i\frac{2(n-1)\pi}{n}}$$

(esto se escribe $\prod_{k=0}^{n-1} e^{i\frac{2k\pi}{n}}$

como multiplicamos con la misma base, sumamos los exponentes

$$= e^{i\sum_{k=0}^{n-1}\frac{2k\pi}{n}} = e^{i\frac{2\pi}{n}\sum_{k=0}^{n-1} k}$$

OJO!

Recordando que $\sum_{k=0}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$

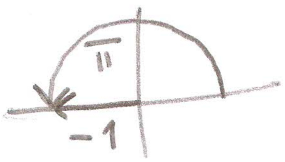
$$= e^{i\frac{2\pi}{n}\cdot\frac{(n-1)(n+1-1)}{2}} = e^{i\frac{\cancel{2}\pi}{\cancel{n}}(n-1)\cdot\frac{\cancel{n}}{\cancel{2}}}$$

$$= \left(e^{i\pi}\right)^{n-1} = (-1)^{n-1}$$

2 formas de calcular $e^{i\pi}$

1) $\cos(\pi) + i\,\mathrm{sen}(\pi) = -1 + 0 = -1$

2)



Sea $f: \mathbb{C}\times\mathbb{C} \to \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$

$$f(z_1,z_2) = |z_1+z_2|$$

PDQ: $f(z_1,z_2)\cdot f(\overline{z_1},\overline{z_2}) \leq (|z_1|+|z_2|)^2$

$$f(z_1,z_2)\cdot f(\overline{z_1},\overline{z_2}) = |z_1+z_2|\cdot|\overline{z_1}+\overline{z_2}|$$

$$= |(z_1+z_2)(\overline{z_1}+\overline{z_2})| = |z_1\overline{z_1} + z_1\overline{z_2} + z_2\overline{z_1} + z_2\overline{z_2}|$$

$$= ||z_1|^2 + z_1\overline{z_2} + z_2\overline{z_1} + |z_2|^2| \quad \left(\begin{array}{l}\text{usando que} \\ |a+b| \leq |a|+|b|\end{array}\right)$$

$$\leq ||z_1|^2| + |z_1\overline{z_2} + z_2\overline{z_1}| + ||z_2|^2| \quad \left(\begin{array}{l}\text{EN } \mathbb{R} \text{ si} \\ b>0 \Rightarrow |b|=b\end{array}\right)$$

$$= |z_1|^2 + |z_1\overline{z_2}+z_2\overline{z_1}| + |z_2|^2$$

QUEREMOS $\leq (|z_1|+|z_2|)^2 = |z_1|^2 + 2|z_1z_2| + |z_2|^2$

faltaría ver que $|z_1\overline{z_2}+z_2\overline{z_1}| \leq 2|z_1z_2|$

Sea $z_1 = (a+bi) \wedge z_2 = (c+di)$

$$\Rightarrow |(a+bi)(c-di) + (c+di)(a-bi)| \quad (i^2=-1)$$

$$= |ac - \cancel{adi} + \cancel{bci} - bdi^2 + ac - \cancel{bci} + \cancel{adi} - dbi^2|$$

$$= |2ac + 2bd| = 2|ac+bd| \overset{?}{\leq} 2|z_1z_2|?$$

NOTEMOS QUE $z_1z_2 = (a+bi)(c+di) = (ac - bd + (bc+ad)i)$

si fuese $(+)$ tariamos listos pues diríamos

$|a| \leq |a+bi|$

(EN TODO TRIANGULO CATETO MIDE MENOS QUE LA HIPOTENUSA)

PERO $|z_1\cdot z_2| = |z_1|\cdot|z_2| = |z_1|\cdot|\overline{z_2}| = |z_1\overline{z_2}|$

$$= |(ac-bd) + (bc-ad)i| \quad //$$

(Acabo de cachar que era más simple

$$|z_1\overline{z_2} + \overline{z_1}z_2| \leq |z_1\overline{z_2}| + |\overline{z_1}z_2| = 2|z_1z_2| \quad //$$

Sean $z, w \in \mathbb{C}$ tq $|z| = |w| = 1$

PDQ: $|z+w| = |z| + |w| \iff z = w$

INDICACIÓN: Pruebe $[|z| = 1 \wedge \mathbb{R}e(z) = 1] \iff z = 1$

Probemos primero la indicación

$(\Leftarrow)$ $z = 1 \Rightarrow |z| = 1 \wedge \mathbb{R}e(z) = 1$ //

$(\Rightarrow)$ $|z| = 1 \Rightarrow \sqrt{a^2+b^2} = 1 \wedge \mathbb{R}(z) = 1 \Rightarrow a = 1$

$\Rightarrow \sqrt{1+b^2} = 1 \Rightarrow 1 + b^2 = 1 \Rightarrow \boxed{b = 0}$

$\Rightarrow z = 1 + 0i = 1$ //

Demostremos ahora el problema

$(\Leftarrow)$ si $z = w \Rightarrow |z+w| = |z+z| = 2|z|$ //

$|z| + |w| = |z| + |z| = 2|z|$ //

$\Rightarrow)$ $|z+w| = |z| + |w| = 2$ (POR ENUNCIADO)

$|(a+bi) + (c+di)| = |(a+c)^2 + (b+d)^2| = 4$

$|a^2 + 2ac + c^2 + b^2 + 2bd + d^2| = 4$

como $|z| = 1 \Rightarrow a^2 + b^2 = 1$

$|w| = 1 \Rightarrow c^2 + d^2 = 1$

$\Rightarrow |2 + 2(ac+bd)| = 4$

$\Rightarrow |1 + (ac+bd)| = 2$

$\Rightarrow \boxed{ac + bd = 1}$

$\Rightarrow \boxed{\mathbb{R}e(z\overline{w}) = 1}$ además $|z\overline{w}| = |z| \cdot |\overline{w}| = 1$

EL HINT NOS DICE $z\overline{w} = 1 \Rightarrow z = \frac{1}{\overline{w}} = \frac{w}{|w|^2} = \frac{w}{1} = w$

$\Rightarrow \boxed{z = w}$ //

Considere $P(x) = x^4 - 2x^3 + 6x^2 + 22x + 13$

se sabe que $x_1 = 2+3i$ es raiz de $P$

factorizarlo en $\mathbb{C}$ y en $\mathbb{R}$

Como $x_1$ es raiz $\Rightarrow \overline{x_1}$ también es.

si bien podriamos dividir $P(x)$ en $(x-x_1)$ y luego en $(x-\overline{x_1})$ para factorizarlo, es mejor dividirlo en $(x-x_1)(x-\overline{x_1})$ pues $P$ NO TIENE "$i$"

$$\Rightarrow (x-(2+3i))(x-(2-3i))$$

$$= (x-2-3i)(x-2+3i)$$

$$= ((x-2)-3i)((x-2)+3i) \quad \left(\begin{matrix}\text{suma por Dif}\\ \text{QUE FÁCIL } \ddot{\text{O}}\end{matrix}\right)$$

$$= (x-2)^2 - (3i)^2 = x^2 - 4x + 4 - 9i^2 = x^2 - 4x + 4 + 9$$

$$= \boxed{x^2 - 4x + 13}$$

$$x^4 - 2x^3 + 6x^2 + 22x + 13 \div x^2 - 4x + 13 = \boxed{x^2 + 2x + 1}$$

$$\begin{array}{r}
x^4 - 2x^3 + 6x^2 + 22x + 13 \\
-(x^4 - 4x^3 + 13x^2) \\
\hline
0 + 2x^3 - 7x^2 + 22x + 13 \\
-(\ 2x^3 - 8x^2 + 26x) \\
\hline
0 + x^2 - 4x + 13 \\
-(x^2 - 4x + 13) \\
\hline
0
\end{array}$$

$$\Rightarrow P(x) = (x^2+2x+1)(x^2-4x+13)$$

factorizado en $\mathbb{R}$ $= (x+1)^2(x^2-4x+13)$ //

factorizado en $\mathbb{C}$ $= (x+1)^2(x-2-3i)(x-2+3i)$ //

Sean $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ Demuestre que

a) $(z_1\overline{z_2} + \overline{z_1}z_2) \in \mathbb{R}$

NOTEMOS QUE $\overline{z_1\overline{z_2}} = \overline{z_1}\,\overline{\overline{z_2}} = \overline{z_1}z_2$

$\Rightarrow (z_1\overline{z_2} + \overline{z_1}z_2) = (z_1\overline{z_2} + \overline{z_1\overline{z_2}}) = 2\mathbb{R}e(z_1\overline{z_2}) \in \mathbb{R}$ //

b) Demuestre que $z_1\overline{z_2} + \overline{z_1}z_2 \leq |z_1|^2 + |z_2|^2$

Sabemos que $(|z_1| - |z_2|)^2 \geq 0$

$\Leftrightarrow |z_1|^2 - 2|z_1||z_2| + |z_2|^2 \geq 0$

$\Rightarrow |z_1|^2 + |z_2|^2 \geq 2|z_1||z_2| = 2|z_1 z_2|$

y sabemos que $\mathbb{R}e(z_1\overline{z_2}) \leq |z_1\overline{z_2}| = |z_1||\overline{z_2}|$

$= |z_1||z_2| = |z_1 z_2|$

$\Rightarrow z_1\overline{z_2} + \overline{z_1}z_2 = 2\mathbb{R}e(z_1\overline{z_2}) \leq 2|z_1 z_2| \leq |z_1|^2 + |z_2|^2$

$\Rightarrow z_1\overline{z_2} + \overline{z_1}z_2 \leq |z_1|^2 + |z_2|^2$ //