

MA1101-7 Introducción al Álgebra

Profesores: José Soto San Martín

Auxiliares: Ilana Mergudich Thal

Fecha: Miércoles 3 de Agosto



## Auxiliar 13: Complejos y Polinomios

**P1.** Determine los valores de  $a, b \in \mathbb{R}$  tales que  $\frac{1}{a+bi} + \frac{2}{a-bi} = 1+i$ .

**P2.** Pruebe que el producto de las  $n$  raíces  $n$ -ésimas de la unidad es igual a  $(-1)^{n-1}$ .

**P3.** Sean  $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ . Demuestre que:

a)  $(z_1 \overline{z_2} + \overline{z_1} z_2) \in \mathbb{R}$

b)  $|z_1|^2 + |z_2|^2 \geq z_1 \overline{z_2} + \overline{z_1} z_2$

**P4.** a) Sea  $f : \mathbb{C} \times \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$  definida por  $f(z_1, z_2) = |z_1 + z_2|$ . Pruebe que

$$\forall z_1, z_2 \in \mathbb{C} : f(z_1, z_2) \cdot f(\overline{z_1}, \overline{z_2}) \leq (|z_1| + |z_2|)^2.$$

b) Sean  $z, w \in \mathbb{C}$  tales que  $|z| = |w| = 1$ . Pruebe que

$$|z + w| = |z| + |w| \Leftrightarrow z = w.$$

**Indicación:** Pruebe que  $[|z| = 1 \wedge \operatorname{Re}(z) = 1] \Leftrightarrow z = 1$ .

**P5.** Considere el polinomio  $P(x) = x^4 - 2x^3 + 6x^2 + 22x + 13$ . Se sabe que  $x_1 = 2 + 3i$  es raíz de  $P$ . Se pide encontrar todas las raíces de  $P$  y luego factorizarlo en  $\mathbb{R}$  y  $\mathbb{C}$ .