Tutorías Movilizadas

Introducción al Cálculo e Introducción al Álgebra

20 de Junio de 2016

I. **Introducción al Álgebra**

P1. Calcule la siguiente suma:

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{(i+1)^k}$$

Escriba el resultado en forma $a + ib$.

P2. Demuestre que las raices del polinomio $p(x) = x^2 + x + 1$ son raices cúbicas de la unidad.

P3. Sean $z_1, z_2, ..., z_n \in \mathbb{C} \setminus 0$ tales que:

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{\overline{z_k}}{|z_k|} = 0$$

Además sea $z \in \mathbb{C}$ arbitrario.

(a) Demuestre que:

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{\overline{z_k}}{|z_k|}(z_k - z) = \sum_{k=1}^{n} |z_k|$$

(b) Demuestre que:

$$\sum_{k=1}^{n} |z_k| \leq \sum_{k=1}^{n} |z_k - z|$$

P4. Calcule:

(a) $\displaystyle\prod_{j=0}^{n-1} w_j$ con w_j la j-ésima raiz n-sima de la unidad.

(b) $\displaystyle\sum_{j=0}^{n-1} w_j$ con w_j la j-ésima raiz n-sima de un complejo cualquiera. Deduzca de esto el valor de $\displaystyle\sum_{j=0}^{n-1} w_j^{-1}$

II. Introducción al Cálculo

P1. La derivada en un punto a de una función $f(x)$ definida en un intervalo abierto I (donde $a \in I$) se define como sigue:

$$f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

Generalmente en física la expresión para la posición de una partícula es $r(t)$, lo cual nos indica en donde se encuentra una partícula en el instante t. Con esta expresión nosotros podemos calcular la velocidad de una partícula $v(t)$ y la aceleración $a(t)$, en donde $v(t) = r'(t)$ y $a(t) = r''(t) = v'(t)$.
Considere ahora una partícula moviendose sinusoidalmente bajo la ecuación de movimiento $r(t) = A\sin(t)$. Calcule la velocidad de la partícula en un instante t cualquiera y de esto, deduzca la aceleración en un instante t cualquiera.

P2. Calcule los siguientes límites:

(a) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\ln(\cos(\sqrt{x}))}{x}$

(b) $\lim\limits_{x \to \pi} \dfrac{sin(x)}{\pi - x}$

(c) $\lim\limits_{x \to \pi} \dfrac{e^{\sin(x)} - 1}{x - \pi}$

(d) $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{\ln(3-x)}{e^{2(x-2)} - 1}$

(e) $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{1 + u - 1}{u + u^{-1}}$

(f) $\lim\limits_{x \to \infty} e^{-x}\sqrt{x}$ (Use la desigualdad de la exponencial y teorema del sandwich)

(g) $\lim\limits_{x \to \infty} (e^{-x}\sqrt{x})^2$

(h) $\lim\limits_{x \to \infty} e^{-x}x$

(i) $\lim\limits_{x \to \infty} x^{-1}\ln(x)$