

Tutorías Movilizadas

Introducción al Cálculo e Introducción al Álgebra

10 de Junio de 2016

I. Introducción al Álgebra

P1. A partir del producto $(1+i)(5-i)^4$ pruebe que $\pi = 16 \arctan(\frac{1}{5}) - 4 \arctan(\frac{1}{239})$

P2. Calcule $\cos(\frac{2\pi}{5})$. Hint: Utilize las raíces quintas de la unidad de forma adecuada.

P3. Sean $M, N \in \mathbb{N}$ tal que existen $a, b, c, d \in \mathbb{N}$ que verifican $M = a^2 + b^2$ y $N = c^2 + d^2$. Demuestre que existen $p, q \in \mathbb{N}$ tal que $MN = p^2 + q^2$. Hint: Recuerde el modulo de los números $a + bi$ y $c + di$.

P4. Sea $S = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$.

(i) Demuestre que $(S, \cdot)$ es subgrupo de $(\mathbb{C} \setminus \{0\}, \cdot)$.

(ii) Para $z \in S$, $z \neq 1$, se define

$$w = \frac{1+z}{1-z}.$$

Demuestre que w es imaginario puro.

(iii) Para $z \in S$, $z \neq 1$, demuestre que:

$$\frac{1+z}{1+\bar{z}} = z$$

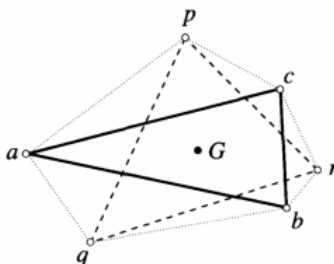
(iv) Para $z \in S$, $z \neq 1$, calcule:

$$\operatorname{Im} \left(\frac{z}{(1+z)^2} \right)$$

P5. El centroide G de un triángulo T es la intersección de sus medianas. Suponga ahora que el triángulo T tiene vertices $a, b, c \in \mathbb{C}$, un hecho conocido (no lo demuestre) es que:

$$G = \frac{1}{3}(a + b + c)$$

Suponga ahora que en los lados de T construimos tres triángulos similares de forma arbitraria. Esto logra construir un nuevo triángulo de vertices $p, q, r \in \mathbb{C}$ como indica la figura. Demuestre que el centroide de este nuevo triángulo coincide con el centroide del triángulo original.



II. Introducción al Cálculo

P1. Calcule, si es que existen, los siguientes límites. Justifique sus pasos.

(i) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sin(\operatorname{tg}(\frac{x}{2}))}{\sin(\frac{1}{x})}$

(ii) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\ln(3-x)}{e^{2(x-2)} - 1}$

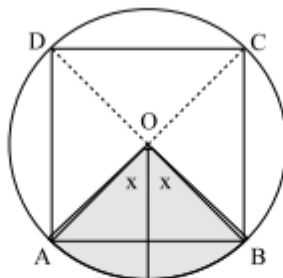
(iii) $\lim_{x \rightarrow 0} x e^{\sin(\frac{\pi}{x})}$

P2. Usando las desigualdades conocidas de la exponencial y el Teorema del Sandwich, demuestre que:

(i) $\lim_{x \rightarrow \infty} x(e^{\frac{1}{x}} - 1) = 1$

(ii) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^{10}}{e^x} = 0$ Hint: Use que $e^x = (e^{\frac{x}{20}})^{20}$ y aplique la desigualdad de la exponencial.

P3. Considere la circunferencia de centro O y radio r de la figura en la que se ha inscrito el rectángulo $ABCD$.



Se pide calcular

$$\lim_{\widehat{AB} \rightarrow 0} \frac{\text{Área Sector}(AOB)}{\text{Área Rectángulo}(ABCD)}.$$

P4. Calcule, si es que existen, los siguientes límites. Justifique sus pasos.

(i) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{1-x^2} - \frac{2}{1-x^4}$

(ii) $\lim_{x \rightarrow \infty} x(\sqrt[n]{a} - 1)$ con $a > 0$.

(iii) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sin(\pi x)}{x(x-1)}$