

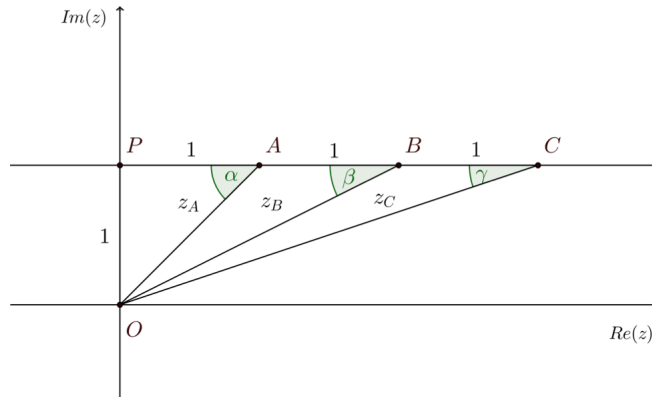
Tutorías Movilizadas

Introducción al Cálculo e Introducción al Álgebra

10 de Junio de 2016

I. Introducción al Álgebra

P1. En el esquema de la figura, los puntos P , A , B y C están en una horizontal. Considere los complejos $z_A = OA$, $z_B = OB$ y $z_C = OC$ (O el origen).



- 1) Escriba z_A , z_B y z_C en forma cartesiana y en forma polar y en este último caso, en función de los ángulos α , β y γ señalados (sin calcularlos).
 - 2) Usando álgebra de números complejos, pruebe que α , β y γ satisfacen la relación $\alpha + \beta + \gamma = \frac{\pi}{2}$.
- P2. Considere los complejos $z = \frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}$ y $w = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$. Encontrar el menor $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ tal que $z^n = w^n = 1$.
- P3. Sean $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, un complejo dado, $n \geq 2$ $\{z_0, \dots, z_{n-1}\}$ las raíces n -ésimas de z . Calcule:

$$\sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{z_k}$$

- P4. Pruebe que $(\forall n \in \mathbb{N}) (2015 - 2014i)^{2013^n} + (2015 + 2014i)^{2013^n} \in \mathbb{R}$.
- P5. Sea $S = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$. Demuestre que $(S, \cdot)$ es subgrupo de $(\mathbb{C} \setminus \{0\}, \cdot)$.
- P6. Para $z \in S$, $z \neq 1$, se define

$$w = \frac{1+z}{1-z}.$$

Demuestre que $w \in (\mathbb{C} \setminus \mathbb{R})$, vale decir, muestre que w es imaginario puro.

II. Introducción al Cálculo

P1. Calcule los siguientes límites:

$$1) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\log(x!)}{x \log(x)}$$

$$2) \lim_{x \rightarrow 0} \cos(x)^{\frac{1}{\sin^2(x)}}$$

$$3) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{a} \left[\frac{b}{x} \right] \text{ para } a, b \geq 0 \text{ y siendo } [\cdot] \text{ la función parte entera.}$$

P2. Calcule, si existen, los siguientes límites:

$$1) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{x^2}}{x}$$

$$2) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{x^2}}{x^2}$$

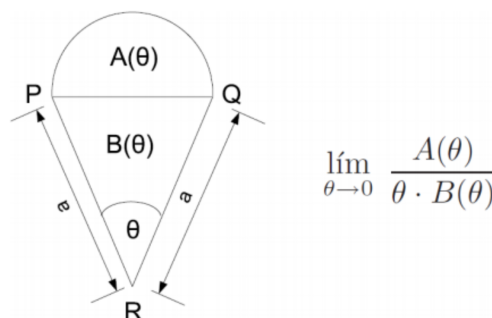
$$3) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{x^2}}{x - x^2}$$

P3. Usando la definición de límite de una función, demuestre que:

$$1) \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\sqrt{\sin(x)}}{e^x} = 0$$

$$2) \lim_{x \rightarrow 0} \cos\left(\frac{1}{x}\right) \text{ no existe.}$$

P4. Un semicírculo de diámetro PQ descansa sobre la base de un triángulo isósceles PQR para formar la región de la figura. Si $A(\theta)$ es el área del semicírculo y $B(\theta)$ es el área del triángulo isósceles ($\overline{PR} = \overline{QR} = a$), se pide calcular:



P5. Sea $f : A \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una función y $x_0 \in A$. Si $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L > 0$, demuestre que:

$$(\exists \delta > 0)(\forall x \in A) \quad 0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow f(x) > 0.$$