

a) PDR: $f^{-1}(\{0_B\})$ es un ideal/
 $\rightarrow f^{-1}(\{0_B\})$ grupo.

NOTEMOS QUE $f^{-1}(\{0_B\}) \subseteq A$
como $(A, +, \cdot)$ anillo $\Rightarrow (A, +)$ grupo
luego basta ver que

$f^{-1}(\{0_B\})$ es subgrupo de A

PDR: $f^{-1}(\{0_B\}) \neq \emptyset$

$$f^{-1}(0_A) = 0_B \Rightarrow 0_A \in f^{-1}(\{0_B\})$$

$\uparrow$

$$\Rightarrow f^{-1}(\{0_B\}) \neq \emptyset$$

TODO MORFISMO
LLEVA EL CERO AL CERO.

PDR: $\forall x, y \in f^{-1}(\{0_B\}) \Rightarrow x + (-y) \in f^{-1}(\{0_B\})$

como f es morfismo

$$f(x + (-y)) = f(x) \oplus f(-y)$$

$$= 0_B \oplus f(-y) = f(-y)$$

pues $x \in f^{-1}(\{0_B\})$

BASTARÍA VER QUE $f(-y) = 0_B$

NOTEMOS QUE NO HEMOS USADO
QUE $y' \in f^{-1}(\{0_B\})$

$$\Rightarrow f(y) = 0_B$$

CAJÍ, AH PERO ... $y + (-y) = 0_A$

$$f(0_A) = f(y + (-y)) = f(y) \oplus f(-y)$$

$$\Rightarrow 0_B = 0_B \oplus f(-y)$$

$$\Rightarrow 0_B = f(-y)$$

$\therefore f^{-1}(\{0_B\})$ (sub) grupo //

Veamos ahora que
 $\forall a \in A, b \in f^{-1}(\{0_B\})$

$$ab \in f^{-1}(\{0_B\})$$
$$ba \in f^{-1}(\{0_B\})$$

QUEREMOS QUE $ab \in f^{-1}(\{0_B\})$ o sea

$$f(ab) = 0_B \quad \text{pero } f \text{ morfismo)}$$

$$\Rightarrow f(ab) = f(a) \oplus f(b) = f(a) \cdot (0_B) = 0_B$$

EN TODO ANILLO
EL NEUTRO DE LA PRIMERA
OPERACIÓN ES ABSORVENTE CON LA 2ª.
ANÁLOGO EL OTRO CASO //

b) I) Sea $a \in A$, es claro que $I \subseteq A$, ^{veamos}
 $A \subseteq I$
 NO TENEMOS MÁS INFORMACIÓN QUE
 I ES IDEAL Y QUE $1 \in I$
 OH! Pero justo los ideales cumplen que

$$\begin{aligned} a \cdot 1 \wedge 1 \cdot a &\in I \\ = a &\in I \\ \Rightarrow A \subseteq I &\Rightarrow A = I // \end{aligned}$$

II) OJO! DICE QUE $\exists x \in I$ invertible
 para $\cdot$, $(I, +)$ es grupo
 Ni IDEA SOBRE $(I, \cdot)$ ASÍ QUE
 EL INVERSO NO TIENE PORQUE ESTAR
 EN I . Pero sí en A .

$$\Rightarrow x^{-1} \in A \wedge x \in I$$

$$\Rightarrow x^{-1} \cdot x \in I$$

$$\Rightarrow 1 \in I$$

Y POR LO ANTERIOR $I = A //$

a) Recordemos que:

$(A, +, \cdot)$ tiene divisores del 0 (neutro para +)

si $\exists a, b \neq 0$ t.s. $ab = 0$

como por enunciado a es divisor

$\exists c$ (que no es b) con $c \neq 0$

$$\text{t.s. } ac = 0 = ca$$

como queremos que
 ab sea divisor del cero
necesitamos que $\exists d \neq 0$ t.s.

$$d \cdot (ab) = (ab)d = 0$$

tomando $d = c$

$$c \cdot (a \cdot b) = (c \cdot a) \cdot b = 0 \cdot b = 0 //$$

$$(a \cdot b) \cdot c = (b \cdot a) \cdot c = b(a \cdot c) = b \cdot 0 = 0 //$$

$\uparrow$
pues es un anillo conmutativo //

∴ ab es divisor del cero //

b) Si ac es divisor del 0 //

$$\Rightarrow ac \neq 0 \Rightarrow a \wedge c \neq 0$$

Además $\exists b \neq 0$ t.s.

$$b \circ (ac) = 0$$

Si a NO ES DIVISOR DE 0 EN R

$$\forall d \neq 0 \quad ad = da \neq 0$$

en particular para $d = b$

$$\Rightarrow \underbrace{(b \circ a)}_0 \circ \underbrace{c}_0 = 0$$

$\Rightarrow (b \circ a) \wedge c$ son divisores de 0
en particular c que era lo que
me interesaba //

(Análogo el otro caso, NOTANDO QUE
EL ANILLO ES COMMUTATIVO $\Rightarrow b \circ a \circ c = b \circ c \circ a$)

c) Veamos que $\text{Ann}(a)$ es (sub) grupo //

1) $\text{Ann}(a) \subseteq A$ //

2) $\text{Ann}(a) \neq \emptyset$ si pues $0 \in \text{Ann}(a)$
 $\wedge$ que $0 \circ a = a \circ 0 = 0$

3) P.D.Q. $\forall x, y \in \text{Ann}(a) \Rightarrow (x + (-y)) \in \text{Ann}(a)$

$$x \in \text{Ann}(a) \Rightarrow xa = 0$$

$$y \in \text{Ann}(a) \Rightarrow \cancel{y}a = 0 = 0a = (y + (-y))a$$

$$xya =$$

$$\Rightarrow 0 = (-y)a \Rightarrow (-y) \in \text{Ann}(a) //$$

$$\Rightarrow (x + (-y)) \mid a$$

$$= xa + (-y)a$$

$$= 0 + 0 = 0$$

$$\text{pues } x \text{ e } -y \in \text{Ann}(a) //$$

$$\Rightarrow (\text{Ann}(a), +) \text{ es grupo.}$$

PDA: $\forall b \in A, \forall c \in \text{Ann}(a)$
 $b \circ c \text{ e } c \circ b \in \text{Ann}(a)$

$$\text{como } c \in \text{Ann}(a)$$

$$\Rightarrow c \circ a = 0$$

$$\Rightarrow b \circ c \circ a = 0$$

$$\Rightarrow (b \circ c) \cdot a = 0 //$$

además como $\text{Ann}(a) \in A$ $\hookrightarrow$ conmutativo para $\cdot$.

$$\rightarrow b \circ c = c \circ b$$

(la conmutatividad es "hereditaria"

$$A \subseteq B \leftarrow \text{conmutativo}$$

$$\Rightarrow A \text{ conmutativo} //$$

Del recuperativo sabemos que

$$(a,b) \sim (c,d) \Leftrightarrow ad = bc$$

es una relación de equivalencia.

y sus clases de equivalencia se
pueden identificar con $[(a,b)] = \frac{a}{b}$

y nos definen

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad + bc}{bd}$$

Cuando se nos pregunta si la
operación está bien definida, es que
si DA^x o mismo cual representante
se tome de la clase $[(a,b)]$
el resultado no cambia.

$$\text{Sea } (x,y) \in [(a,b)]$$

$$\text{P.D.R.} \quad \frac{x}{y} + \frac{c}{d} = \frac{a}{b} + \frac{c}{d}$$

$$\frac{x}{y} + \frac{c}{d} = \frac{xd + cy}{yd}$$

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad + cb}{bd}$$

queremos que
sean iguales
SON CLASES DE
EQUIVALENCIA!

o sea que

$$\frac{xd + cy}{yd} \in [(ad + cb), bd]$$

$$\Leftrightarrow \frac{xd + cy}{yd} \sim$$

$$(xd + cy)(bd) = (ad + cb)(yd)$$

$$xbd^2 + cybd = ad^2y + cb yd$$

esto pues como es anillo

• distribuye con respecto a +
n es conmutativo

Solo FALTA que $xbd^2 = ad^2y$
pero $xb = ay$ (pues $(x, y) \in [(a, b)]$)
 $\Rightarrow$ se tiene la igualdad.

Análogo para $(r,s) \in [(c,d)]$
además para la otra operación.

PDA: $\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{x}{y} \cdot \frac{c}{d}$

$$\Leftrightarrow [(ac, bd)] = [(xc, yd)]$$

$$\Leftrightarrow (ac, bd) \sim (xc, yd)$$

~~$(ac, bd) \sim (xc, yd)$~~

$$ac \cdot yd = bd \cdot xc$$

pero $(x,y) \sim (a,b)$

$$\Rightarrow xb = ya$$

$$\Rightarrow ac \cdot yd = ay \cdot cd = xb \cdot cd = bd \cdot xc //$$

Análogo para $(r,s) \in [(c,d)]$

Ustedes se preguntarán

¡Pero si eso es obvio! siempre
se han sumado fracciones así!

PERO AHORA ESTÁN SUMANDO
CLASES DE EQUIVALENCIA.

FINALMENTE VEAMOS QUE

$(A \times A / \sim, +, \cdot)$ es cuerpo

$\Rightarrow (A \times A / \sim, +)$ grupo abeliano

$$\left(\frac{a}{b} + \frac{c}{d}\right) + \frac{e}{f} = \frac{ad + cb}{bd} + \frac{e}{f}$$

$$= \frac{adf + cbf + ebd}{bdf}$$

$$= \frac{a}{b} + \frac{cf + ed}{df} = \frac{a}{b} + \left(\frac{c}{d} + \frac{e}{f}\right)$$

$\therefore$ asociativa.

$$\left(\frac{a}{b} + \frac{c}{d}\right) = \frac{ad + cb}{bd} = \frac{da + bc}{db} = \frac{c}{d} + \frac{a}{b}$$

$\therefore$ conmutativa.

$$\left(\frac{a}{b} + \frac{0}{1}\right) = \left(\frac{a1 + 0b}{b1}\right) = \frac{a}{b}$$

$\therefore [(0,1)]$ es el neutro

$$\left(\frac{a}{b} + \frac{-a}{b} \right) = \frac{ab + (-a)b}{b \cdot b} = \frac{ab - ab}{b \cdot b}$$

prop. anillos.

$$= \frac{0}{b^2} = \frac{1}{b^2} \cdot \frac{0}{1} = 0$$

como es el neutro para $+$
es absorbente para $\cdot$

$\therefore$ Todos tienen inverso.

$\therefore$ Es grupo abeliano

PDQ: distribuye con respecto a $+$

$$\frac{e}{f} \left(\frac{a}{b} + \frac{c}{d} \right) = \frac{e}{f} \left(\frac{ad + cb}{bd} \right)$$

$$= \frac{ead + ec b}{fbd}$$

$$= \frac{ead}{fbd} + \frac{ecb}{fbd} \quad \text{pues } d \cdot b \neq 0$$

$$\Rightarrow = \frac{e}{f} \cdot \frac{a}{b} + \frac{e}{f} \cdot \frac{c}{d} \quad (\text{Análogo otro caso})$$

$$\left(\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d}\right) \cdot \frac{e}{f}$$

$$= \left(\frac{ac}{bd}\right) \cdot \frac{e}{f} = \frac{ace}{bdf} = \frac{a}{b} \cdot \left(\frac{ce}{df}\right) = \frac{a}{b} \cdot \left(\frac{c}{d} \cdot \frac{e}{f}\right)$$

$$\Rightarrow (A \times A \setminus \{0\} / \sim, +, \cdot)$$

es un anillo

$$\left(\frac{a}{b} \cdot \frac{1}{1}\right) = \frac{a \cdot 1}{b \cdot 1} = \frac{a}{b} \Rightarrow \frac{1}{1} \text{ es neutro}$$

$\Rightarrow$ es anillo con unidad

$$\left(\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d}\right) = \left(\frac{ac}{bd}\right) = \frac{ca}{db} = \frac{c}{d} \cdot \frac{a}{b}$$

$\Rightarrow$ es anillo conmutativo con unidad.

$$(\text{sea } \frac{a}{b} \neq \frac{0}{1} \Rightarrow \frac{b}{a} \neq \frac{1}{0})$$

$\Rightarrow$ tiene sentido $\frac{b}{a}$

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{b}{a} = \frac{ab}{ba} = \frac{1}{1} \Rightarrow \text{todo elemento distinto del } 0 \text{ tiene inverso}$$

$\Rightarrow (A \times A \setminus \{0\} / \sim, +, \cdot)$ es un cuerpo.

ES IMPORTANTE NOTAR
QUE EL NEUTRO ES ÚNICO

¿Pero $\frac{0}{2}$ también es 0?

SÍ PERO SE ESTÁN USANDO
CLASES DE EQUIVALENCIA

$$\Rightarrow \frac{0}{2} = \frac{0}{1} = \frac{0}{K} = 0 //$$

NO SOLO TOMAN EL MISMO VALOR
SON EL MISMO ELEMENTO!, lo
MISMO PARA $\frac{2}{2} = \frac{1}{1} = \frac{3}{3} = \frac{K}{K} = 1 //$

EN RESUMEN $[(0, K)] = [(0, 1)] \leftarrow \text{neutro para } +$
 $[(K, K)] = [(1, 1)] \leftarrow \text{neutro para } \cdot$

Además del recuperativo

$$F: (A \times A / \sim) \rightarrow \mathbb{Q}$$

$$F([(a, b)]) = \frac{a}{b} \text{ es biyectiva.}$$

y por la definición de las operaciones
se tiene el morfismo.

P4) BASTA tomar la función

$$f: \mathbb{Z}_4 \rightarrow \{1, -1, i, -i\}$$

$$f([1]) = i$$

$$f([2]) = -1$$

$$f([3]) = -i$$

$$f([4]) = 1$$

(o cualquier otra). Esta función es claramente biyectiva ya que ^{para} cada elemento del conjunto de llegada ($\forall y$) existe alguien en $\mathbb{Z}_4$ ($\exists x$) tal que $f(x) = y$ (sobreyectividad) y cada elemento de $\mathbb{Z}_4$ llega a alguien distinto (inyectividad).

veamos ahora que es un morfismo

$$P.D.Q \quad f(a +_4 b) = f(a) \cdot f(b) \quad \forall a, b \in \mathbb{Z}_4$$

veamoslo a través de las tablas:

$+_4$	1	2	3	4
1	1	2	3	4
2	2	4	2	4
3	3	2	1	4
4	4	4	4	4

$\cdot$	i	-1	$-i$	1
i	-1	$-i$	1	i
-1	$-i$	1	i	-1
$-i$	1	i	-1	$-i$
1	i	-1	$-i$	1

si se toman dos elementos $a, b \in \mathbb{Z}_4$ se puede notar que $f(a + b) = K = f(a) \cdot f(b)$ para todos los elementos de la tabla.

$$\text{por ejemplo } f(1+3) = f(4) = 1 = i \cdot -i = f(1) \cdot f(3)$$

y así para cualquier elemento