MA1101-7 Introducción al Álgebra
Profesor: José Soto San Martín
Auxiliar: Ilana Mergudich Thal
Fecha: Miércoles 1 de Junio del 2016

Auxiliar 11: Anillos

Resumen:
Sea $(A, +, \cdot)$ un conjunto con dos estructuras:

- Se dice **anillo** si $(A, +)$ es grupo abeliano, y además $\cdot$ es asosciativa y distribuye con respecto a $+$.
- Se dice **anillo conmutativo con unidad** si es un anillo, y $\cdot$ es conmutativo y posee neutro.
- Si es un anillo con unidad con $|A| > 1 \Rightarrow 0 \neq 1$.
- Sean x, y ambos no nulos. Si $x \cdot y = 0$ se dice que x e y son **divisors del cero.**
  Notar que en este caso $x \cdot a = x \cdot b \not\Rightarrow a = b$.
- Se dice **cuerpo** si es un anillo conmutativo con unidad y $\forall x \in A \setminus \{0\}$ es invertible para $\cdot$.
  Notar que todo cuerpo no tiene divisores del cero (ojo es solo una implicancia).
- Si es un anillo conmutativo con unidad y $|A|$ finito lo anterior es una equivalencia.

P1. Sea $(A, +, \cdot)$ un anillo. Un subconjunto $I \subseteq A$ se dirá ideal de A si y solo si:

- $(I, +)$ es grupo.
- $\forall a \in A, b \in I \quad a \cdot b \in I \wedge b \cdot a \in I$

(a) Sea $F : (A, +, \cdot) \to (B, \oplus, \odot)$ un morfismo sobreyectivo de anillos. Demuestre que $F^{-1}(\{0_B\})$ es un ideal de A donde 0_B es el neutro para $\oplus$ en B

(b) Sea $(A, +, \cdot)$ un anillo con unidad $1 \in A$, e I ideal en A.

  (I) Demuestre que si $1 \in I$, entonces $I = A$.

  (II) Demuestre que si $\exists x \in I$ invertible para $\cdot$, entonces $I = A$.

P2. Sea $(A, +, \cdot)$ un anillo conmutativo.

(a) Si $a \in A$ es un divisor del 0 y $b \in A$, tal que $a \cdot b \neq 0$,entonces $a \cdot b$ es divisor del 0.

(b) Demuestre que si el producto de dos elementos es divisor del 0, entonces al menos uno de ellos es divisor del 0.

(c) Se sea $a \in A$ define el conjunto aniquilador de a , como $Ann(a) = \{b \in A \mid \text{ tal que } b \cdot a = 0\}$. Pruebe que $Ann(a)$ es un ideal, definido como en el problema anterior.

P3. Sea $(A, +, \cdot)$ un anillo conmutativo, con unidad y sin divisores de 0, sobre $A \times A \setminus \{0\}$ se define la siguiente relación de equivalencia (demuéstrelo):

$$(a, b) \sim (c, d) \Leftrightarrow ad = bc$$

Adicionalmente sobre $A \times A \setminus \{0\}/\sim$ (el conjunto cuociente) denotamos la clase $[(a, b)]$ por $\frac{a}{b}$, y definimos las operaciones

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad + bc}{bd} \qquad\qquad \frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$$

Pruebe que estas operaciones **están bien definidas** y que $(A \times A \setminus \{0\}/\sim, +, \cdot)$ es un cuerpo, con $\frac{0}{1} = 0$ y $\frac{1}{1} = 1$.

Con esto puede notar que $(\mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \setminus \{0\}/\sim, +, \cdot) \cong (\mathbb{Q}, +, \cdot)$.

P4. Demuestre que $(\mathbb{Z}_4, +_4)$ es isomorfo a $(\{1, -1, i, -i\}, \cdot)$.