

PAUTA AUX 10

P1) a) claramente si H y K son subconjuntos de G ,
 $H \cap K$ también lo es, además $e \in H \wedge e \in K$ (son grupos)
 $\Rightarrow e \in H \cap K \Rightarrow H \cap K \neq \emptyset$
 veamos ahora que $\forall x, y \in (H \cap K), x * y^{-1} \in (H \cap K)$
 en efecto:

$$x, y \in H \cap K \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x, y \in H \Rightarrow x * y^{-1} \in H \\ x, y \in K \Rightarrow x * y^{-1} \in K \end{array} \right\} \xrightarrow{\text{Pg. } H \text{ y } K \text{ son subgrupos.}} x * y^{-1} \in (H \cap K)$$

$\therefore H \cap K$ es subgrupo de G

b) como $H \cap K$ subgrupo $\Rightarrow |H \cap K| \mid |H| \wedge |H \cap K| \mid |K|$
 $55 = 5 \cdot 11 \cdot 1$ $38 = 19 \cdot 2 \cdot 1$

Y el único divisor común es el 1 $\Rightarrow |H| = 1$
 y el neutro siempre está $\Rightarrow H = \{e\}$ //

c) $\Leftarrow$ caso 1: $H \subseteq K \Rightarrow H \cup K = K$ y como K es subgrupo de G ,
 $H \cup K$ también lo es.

caso 2: $K \subseteq H \Rightarrow H \cup K = H$ y como H es subgrupo de G ,
 $H \cup K$ también lo es

$\Rightarrow H \cup K$ subgrupo de G

$\therefore H \subseteq K \vee K \subseteq H \Rightarrow H \cup K$ subgrupo de G

$$\Rightarrow \boxed{\text{P.D.Q: } H \leq K \vee K \leq H \Leftrightarrow H \not\leq K \Rightarrow K \leq H} \quad \leftarrow \text{caracterización del implica}$$

En efecto: $H \not\leq K \Leftrightarrow \exists h \in H \text{ tq' } h \notin K$

P.D.Q: $K \leq H$

ya que tenemos como hipótesis que $H \cup K$ es subgrupo de G ,

$$\forall K \in K, \quad K \cdot h \in H \cup K$$

$$\Leftrightarrow K \cdot h \in H \vee K \cdot h \in K$$

↑
esto es Falso

ya que si $K \cdot h \in K$

$$\Rightarrow K^{-1} \cdot K \cdot h \in K \Rightarrow h \in K \rightarrow \text{no}$$

$$\Rightarrow K \cdot h \in H$$

$$\Rightarrow K \cdot h \cdot h^{-1} \in H \Rightarrow K \in H$$

$$\therefore K \in K \Rightarrow K \in H$$

$$\Leftrightarrow K \leq H$$

$$\therefore H \not\leq K \Rightarrow K \leq H$$

$$\Leftrightarrow H \leq K \vee K \leq H$$

$$\therefore H \cup K \text{ subgrupo de } G \Rightarrow H \leq K \vee K \leq H //$$

P2) a)

$\cdot_s$	[1]	[2]	[3]	[4]	[5]
[1]	[1]	[2]	[3]	[4]	[5]
[2]	[2]	[4]	[1]	[3]	[5]
[3]	[3]	[1]	[4]	[2]	[5]
[4]	[4]	[3]	[2]	[1]	[5]
[5]	[5]	[5]	[5]	[5]	[5]

b) $(\mathbb{Z}_5, \cdot_s)$ no es un grupo ya que [5] no tiene inverso.

(no existe nadie tal que [alguien] $\cdot_s$ [5] = [1] //

c) Notemos que [0] = [5]

veamos entonces que $(\mathbb{Z}_5 \setminus \{[0]\}, \cdot_s)$ es grupo abeliano

- conmutatividad: ya que la diagonal de la tabla es como un "espejo", $\cdot_s$ conmuta.
- neutro: De la tabla es claro que [1] es neutro.

- Inverso: De la tabla podemos observar que:

$$[1] \cdot_s [1] = [1]$$

$$[2] \cdot_s [3] = [1]$$

$$[4] \cdot_s [4] = [1]$$

$\therefore$ Todos los elementos tienen inverso

- asociatividad:

$$([a] \cdot_s [b]) \cdot_s [c] = [a \cdot_s b] \cdot_s [c] = [a \cdot_s (b \cdot_s c)]$$

$$= [a] \cdot_s [b \cdot_s c] = [a] \cdot_s ([b] \cdot_s [c]) \quad \forall a, b, c \in \mathbb{Z}_5 \setminus \{[0]\}$$

$\therefore (\mathbb{Z}_5 \setminus \{[0]\}, \cdot_s)$ asocia

$\therefore (\mathbb{Z}_5 \setminus \{[0]\}, \cdot_s)$ es un grupo abeliano

d) ya que $|\mathbb{Z}_5 \setminus \{[0]\}| = 4$, podemos tener subgrupos de cardinal 1, 2 y 4

el de 1 es $(\{[1]\}, \cdot)$ (el neutro siempre es subgrupo)

el de 4 es $(\mathbb{Z}_5 \setminus \{0\}, \cdot_5)$ (el mismo grupo)

ahora veamos quienes pueden ser los de cardinal = 2.

Recordemos que el neutró siempre tiene que estar, entonces quién más?

Una propiedad importante de los subgrupos es la cerradura

$(x, y \in S \Rightarrow x \circ y \in S)$. nuestro subgrupo es $(\{[1], [\text{alguien}]\}, \circ)$

claramente $[1] \leq [1]$, $[1] \leq [\text{alguien}]$ estarán en el conjunto,

pero necesitamos que [alguien] y [alguien] también lo este, es decir

$[alguen]_s [alguen]$ sea $[1]$ o $[alguen]$. volvamos a la tabla:

El [4] es el único que lo cumple!!

Los subgrupos son:

$$(\{[1]\}, \circ_s), (\mathbb{Z}_5 \setminus \{[0]\}, \circ_s) \text{ y } (\{[0], [4]\}, \circ_s)$$

↳ OTRA FORMA DE VERLO ES QUE EN LOS GRUPOS TODOS DEBEN TENER INVERSO

Si CONSIDERÁRAMOS

$(\{[1], [2]\})$ ó $(\{[1], [3]\})$ NO SE
 ↑ ↑
 su inverso su inverso
 es el [3] es el [2]

P3) a) $f_e(x) = e * x * e^{-1} = e * x * e = x$

$\therefore f_e = \text{Id}_G$

$f_{a*b}(x) = (a*b) * x * (a*b)^{-1} = a*b * x * b^{-1} * a^{-1}$

$= f_a(b * x * b^{-1}) = f_a(f_b(x)) = f_a \circ f_b //$

b) morfismo: $f_a(x*y) = a * x * y * a^{-1} = a * x * e * y * a^{-1}$
 $= a * x * \underbrace{a^{-1} * a}_e * y * a^{-1} = f_a(x) * f_a(y)$

Biyección: veamos que f_a es invertible

~~$f_a^{-1}(f_a(x)) = f_a^{-1}(a * x * a^{-1}) = a^{-1} * a * x * a * a^{-1} = x$~~

Buscamos a g tal que $f_a \circ g = \text{Id}$

En efecto: $\text{Id}_G = f_e \text{ (por (a))} = f_{a*a^{-1}} = f_a \circ f_{a^{-1}}$

$\therefore \forall a \ f_a^{-1}$ es invertible

$(\Rightarrow) f_a$ es biyectiva

$\therefore f_a$ es isomorfismo de $(G, *)$ en $(G, *)$.

$(\{f_a | a \in G\}, \circ)$ es grupo ya que todos los elementos tienen inverso, existe el neutro ($f_e = \text{Id}_G$) y la composición es asociativa.

c) P.D.Q : $(H(G), *)$ es subgrupo de $(G, *)$

claramente $H(G) \subseteq G$ $\wedge$ $\text{Id}_G = f_e \Rightarrow e \in H(G)$
 $\Rightarrow H \neq \emptyset$

veamos que $\forall x, y \in H(G) \quad x * y^{-1} \in H(G)$

En efecto $x, y \in H(G) \Leftrightarrow f_x = f_y = \text{Id}_G$

Pero $f_{x * y^{-1}} = f_x \circ f_{y^{-1}} = f_x \circ f_y^{-1} = \text{Id}_G \circ \text{Id}_G^{-1} = \text{Id}_G$

$\Rightarrow f_{x * y^{-1}} = \text{Id}_G \Rightarrow x * y^{-1} \in H(G) //$

• P.D.Q : $\forall x \in G \quad a * x = x * a \Leftrightarrow a \in H(G)$

$a \in H(G) \Leftrightarrow f_a = \text{Id} \Leftrightarrow a * x * a^{-1} = x \Leftrightarrow a * x = x * a //$
 $\uparrow$
 $/ * a$

P4) a) Como G grupo $\Rightarrow$ es cerrado $\Rightarrow HK \subseteq G$, ademais
 veamos que $\forall x, y \in H \cdot K \quad x \cdot y^{-1} \in H \cdot K$
 $e = e \cdot e \Rightarrow HK \neq \emptyset$
 $\begin{matrix} e & e \\ H & K \end{matrix}$

En efecto: $x \in H \cdot K \Leftrightarrow x = \tilde{h} \cdot \tilde{k}, \tilde{h} \in H \wedge \tilde{k} \in K$

$y \in H \cdot K \Leftrightarrow y = \hat{h} \cdot \hat{k}, \hat{h} \in H \wedge \hat{k} \in K$

$$\begin{aligned} \Rightarrow x \cdot y^{-1} &= \tilde{h} \cdot \tilde{k} \cdot (\hat{h} \cdot \hat{k})^{-1} = \tilde{h} \cdot \tilde{k} \cdot \hat{k}^{-1} \cdot \hat{h}^{-1} \\ &= \tilde{h} \cdot \tilde{k} \cdot \hat{k}^{-1} \cdot \hat{h}^{-1} = \tilde{h} \cdot \hat{h}^{-1} \cdot \tilde{k} \cdot \hat{k}^{-1} = \bar{h} \cdot \bar{k} \in H \cdot K // \\ &\quad \nearrow \text{conmuta pq } H \text{ es grupo abeliano.} \end{aligned}$$

b) Supongamos que $a^3 = e$
 $\Rightarrow a^2 \cdot a = a \cdot a^2 = e$
 $\Rightarrow$ el inverso de a es a^2

$\Rightarrow$ podemos considerar el subgrupo
 $A = \{e, a, a^2\}$, NOTEMOS que $|A| = 3$
 pero 3 NO DIVE A 4 POR
 LAGRANGE ESTO ES UNA CONTRADICCIÓN //

¡OJO! HAY que REVISAR que es grupo
 claramente es subconjunto y no vacío

PDA: $\forall x, y \in A \Rightarrow xy^{-1} \in A$

x	y	xy^{-1}
e	a	a
e	a^2	a^2
e	e	e

x	y	xy^{-1}
a	e	a
a	a	a^2
a	a^2	$a^3 = e$

x	y	xy^{-1}
a^2	e	a^2
a^2	a	a^2
a^2	a^2	$a^4 = aa^3 = ae = a //$

∴ A subgrupo //