12. Semana 11

P1 **(a)**

$\oplus$	a	b	c	d
a	a	b	c	d
b	b	a	d	c
c	c	d	a	b
d	d	c	b	a

$\odot$	a	b	c	d
a	a	a	a	a
b	a	a	a	a
c	a	b	c	d
d	a	b	c	d

1.1) Recordemos que $(A, \oplus)$ es grupo abeliano, con esto tenemos $a \oplus b = b \oplus a = b$ y $a \oplus d = d \oplus a = d$, tenemos que a es neutro, ya que ni b ni d pueden serlo ($a \oplus b \neq a$ y $a \oplus d \neq a$), c tampoco puede serlo ya que $c \oplus c \neq c$, por lo tanto, $a \oplus c = c \oplus a = c$, notemos que los inversos de b y c son ellos mismos, ahora veamos que $c \oplus b = b \oplus c = d$, $b \oplus d = d \oplus b = c$ y $d \oplus c = c \oplus d = b$.

Supongamos que $c \oplus b = b \oplus c \neq d$, esto entonces nos lleva a tres casos posibles:

- $c \oplus b = b \oplus c = a \Rightarrow$ el inverso de c es b, lo cual es una contradicción porque el inverso es único.
- $c \oplus b = b \oplus c = c \Rightarrow b$ es elemento neutro, lo cual es imposible porque el neutro es único.
- $c \oplus b = b \oplus c = b \Rightarrow c$ es elemento neutro, lo cual es imposible porque el neutro es único.

Se concluye que $c \oplus b = b \oplus c = d$.

Supongamos que $b \oplus d = d \oplus b \neq c$, esto entonces nos lleva a tres casos posibles:

- $b \oplus d = d \oplus b = a \Rightarrow$ el inverso de b es d, lo cual es una contradicción porque el inverso es único.
- $b \oplus d = d \oplus b = d \Rightarrow b$ es elemento neutro, lo cual es imposible porque el neutro es único.
- $b \oplus d = d \oplus b = b \Rightarrow d$ es elemento neutro, lo cual es imposible porque el neutro es único.

Se concluye que $b \oplus d = d \oplus b = c$.

Supongamos que $d \oplus c = c \oplus d \neq b$, esto entonces nos lleva a tres casos posibles:

- $d \oplus c = c \oplus d = a \Rightarrow$ el inverso de c es d, lo cual es una contradicción porque el inverso es único.
- $d \oplus c = c \oplus d = d \Rightarrow c$ es elemento neutro, lo cual es imposible porque el neutro es único.
- $d \oplus c = c \oplus d = c \Rightarrow d$ es elemento neutro, lo cual es imposible porque el neutro es único.

Se concluye que $d \oplus c = c \oplus d = b$.

Finalmente como d tiene que poseer inverso y no pueden ser ni a, b o c ya que el inverso es único, solamente queda que d sea inverso de sí mismo, es decir $d \oplus d = a$.

Para la otra tabla usaremos la propiedad distributiva es así como tenemos lo siguiente:

- $b \odot c = (c \oplus d) \odot c = (c \odot c) \oplus (d \odot c) = c \oplus c = a$
- $b \odot b = b \odot (d \oplus c) = (b \odot d) \oplus (b \odot c) = a \oplus a = a$
- $c \odot b = (b \oplus d) \odot b = (b \odot b) \oplus (d \odot b) = a \oplus b = b$
- $c \odot d = c \odot (b \oplus c) = (c \odot b) \oplus (c \odot c) = b \oplus c = d$
- $d \odot d = d \odot (b \oplus c) = (d \odot b) \oplus (d \odot c) = b \oplus c = d$

1.2) No es conmutativo, basta ver que $b \odot c \neq c \odot b$, tampoco tiene neutro, ya que de existir debería cumplir que $x \odot e = x \; \forall x \in \{a, b, c, d\}$, ilustrativamente debería haber una tabla del estilo

$\odot$	a	b	c	d
a			a	
b			b	
c	a	b	c	d
d			d	

es decir que se repitan los elementos en la fila y columna i-ésima, siendo el elemento i-ésimo el elemento neutro (en el ejemplo es c), como esto no ocurre, el anillo no posee neutro para $\odot$. Finalmente sí posee divisores de cero ya que el neutro para $\oplus$ es a y $b \odot c = b \odot b = b \odot d = a$, con $b, c, d \neq a$.

(b) c.1) Sea $x \in A$

$$\begin{aligned}
x &= x \cdot x \qquad \backslash\text{hipótesis} \\
&= (-x) \cdot (-x) \qquad \backslash\text{propiedad de los anillos} \\
&= (-x) \cdot [(-x) \cdot (-x)] \qquad \backslash\text{hipótesis} \\
&= (-x) \cdot (x \cdot x) \qquad \backslash\text{propiedad de los anillos} \\
&= (-x) \cdot x \qquad \backslash\text{hipótesis} \\
&= -(x \cdot x) \qquad \backslash\text{propiedad de los anillos} \\
&= -(x) \qquad \backslash\text{hipótesis} \\
&= -x
\end{aligned}$$

c.2) Sean $x, y \in A$

$$\begin{aligned}
(x+y) &= (x+y)\cdot(x+y) \quad \backslash\text{hipótesis}\\
(x+y) &= (x+y)\cdot x + (x+y)\cdot y \quad \backslash\text{distributividad}\\
(x+y) &= x\cdot x + y\cdot x + x\cdot y + y\cdot y\\
(x+y) &= x + y\cdot x + x\cdot y + y \quad \backslash\text{hipótesis}\\
(x+y) &= (x+y) + y\cdot x + x\cdot y \quad \backslash\text{sumando con} -(x+y)\\
(x+y)-(x+y) &= (x+y)-(x+y) + y\cdot x + x\cdot y\\
0 &= y\cdot x + x\cdot y \quad \backslash\text{sumando con} -(x\cdot y)\\
0-(x\cdot y) &= y\cdot x + x\cdot y - (x\cdot y)\\
-(x\cdot y) &= y\cdot x\\
x\cdot y &= y\cdot x \quad \backslash\text{propiedad c.1}
\end{aligned}$$

c.3) Sean $x, y \in A$

$$\begin{aligned}
(x\cdot y)\cdot(x+y) &= (x\cdot y)\cdot x + (x\cdot y)\cdot y \quad \backslash\text{distributividad}\\
&= (x\cdot x)\cdot y + x\cdot(y\cdot y) \quad \backslash\text{conmutatividad y asociatividad de }\cdot\\
&= x\cdot y + x\cdot y \quad \backslash\text{hipótesis}\\
&= x\cdot y - (x\cdot y) \quad \backslash\text{propiedad c.1}\\
&= 0
\end{aligned}$$

P2 **(a)** Primero demostraremos que $(\mathbb{R}^2, \oplus)$ es grupo abeliano, es decir, que es asociativo, conmutativo, posee neutro e inverso.

- Asociatividad: Sean $(a,b),(c,d),(e,f) \in \mathbb{R}^2$

$$\begin{aligned}
[(a,b)\oplus(c,d)]\oplus(e,f) &= (a+c, b+d)\oplus(e,f)\\
&= ((a+c)+e, (b+d)+f)\\
&= (a+(c+e), b+(d+f)) \quad \backslash\text{asociatividad en } \mathbb{R}\\
&= (a,b)\oplus(c+e, d+f)\\
&= (a,b)\oplus[(c,d)\oplus(e,f)]
\end{aligned}$$

- Neutro: Como el 0 es el neutro en la suma para $\mathbb{R}$, entonces el neutro para $\mathbb{R}^2$ será (0,0), en efecto, sean $(a,b),(0,0) \in \mathbb{R}^2$, se tiene que $(a,b)\oplus(0,0) = (0,0)\oplus(a,b) = (a+0, b+0) = (0+a, 0+b) = (a,b)$ se concluye que el neutro es el par (0,0).
- Inverso: Sean $a, b \in \mathbb{R}$ y $-a, -b \in \mathbb{R}$ sus inversos para la suma en $\mathbb{R}$ respectivos, entonces, dado el par $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ su inverso será el par $(-a,-b)$, en efecto $(a,b)\oplus(-a,-b) = (-a,-b)\oplus(a,b) = (a-a, b-b) = (-a+a, -b+b) = (0,0)$ se concluye que el inverso, dado $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ es el par $(-a,-b)$.

- Conmutatividad: Sean $(a,b),(c,d) \in \mathbb{R}^2$

$$\begin{aligned}(a,b)\oplus(c,d) &= (a+c,b+d)\\ &= (c+a,d+b) && \backslash\text{conmutatividad en } \mathbb{R}\\ &= (c,d)\oplus(a,b)\end{aligned}$$

Ahora demostraremos que $(\mathbb{R}^2,\odot)$ es asociativo, posee neutro, conmutativo y distribuye con respecto a $\oplus$.

- Asociatividad: Sean $(a,b),(c,d),(e,f) \in \mathbb{R}^2$

$$\begin{aligned}[(a,b)\odot(c,d)]\odot(e,f) &= (a\cdot c,b\cdot d)\odot(e,f)\\ &= ((a\cdot c)\cdot e,(b\cdot d)\cdot f)\\ &= (a\cdot(c\cdot e),b\cdot(d\cdot f)) && \backslash\text{asociatividad en } \mathbb{R}\\ &= (a,b)\odot(c\cdot e,d\cdot f)\\ &= (a,b)\odot[(c,d)\odot(e,f)]\end{aligned}$$

- Neutro: Como el 1 es el neutro en la multiplicación para $\mathbb{R}$, entonces el neutro para $\mathbb{R}^2$ será (1,1), en efecto, sean $(a,b),(1,1) \in \mathbb{R}^2$, se tiene que $(a,b)\odot(1,1) = (1,1)\oplus(a,b) = (a\cdot 1,b\cdot 1) = (1\cdot a,1\cdot b) = (a,b)$ se concluye que el neutro es el par (1,1).
- Conmutatividad: Sean $(a,b),(c,d) \in \mathbb{R}^2$

$$\begin{aligned}(a,b)\odot(c,d) &= (a\cdot c,b\cdot d)\\ &= (c\cdot a,d\cdot b) && \backslash\text{conmutatividad en } \mathbb{R}\\ &= (c,d)\odot(a,b)\end{aligned}$$

- Distributividad: Sean $(a,b),(c,d),(e,f) \in \mathbb{R}^2$

$$\begin{aligned}(a,b)\odot[(c,d)\oplus(e,f)] &= (a,b)\odot(c+e,d+f)\\ &= (a\cdot(c+e),b\cdot(d+f))\\ &= (a\cdot c+a\cdot e,b\cdot d+b\cdot f) && \backslash\text{distributividad en } \mathbb{R}\\ &= (a\cdot c,b\cdot d)\oplus(a\cdot e,b\cdot f)\\ &= [(a,b)\odot(c,d)]\oplus[(a,b)\odot(e,f)]\end{aligned}$$

(b) En $\mathbb{R}^2$ tomemos $(1,0),(0,1) \neq (0,0)$, pero $(1,0)\odot(0,1) = (1\cdot 0,0\cdot 1) = (0,0)$, con lo que se encontraron divisores de 0.

(c) Supongamos que sí existe un isomorfismo entre $(\mathbb{R}^2,\oplus,\odot)$ y $(\mathbb{C},+,\cdot)$, esto quiere decir que $f(x\oplus y) = f(x)+f(y)$ y $f(x\odot y) = f(x)\cdot f(y)$, debido a que es morfismo se tiene que $f(0_{\mathbb{R}^2}) = 0_{\mathbb{C}}$ en donde $0_{\mathbb{R}^2}$ es el neutro en la suma para $(\mathbb{R}^2,\oplus,\odot)$ y $0_{\mathbb{C}}$ es el neutro en la suma para $(\mathbb{C},+,\cdot)$. Por la parte (b), se tiene que $(\mathbb{R}^2,\oplus,\odot)$ posee divisores de 0, es decir, se tienen dos elementos $x,y \neq 0_{\mathbb{R}^2}$ tales que $x\odot y = 0_{\mathbb{R}^2}$, luego si tomamos estos 2 elementos se tiene que $f(0_{\mathbb{R}^2}) = f(x\odot y) = f(x)\cdot f(y) = 0_{\mathbb{C}}$, con esto se concluye que $(\mathbb{C},+,\cdot)$ posee divisores de 0, lo cual es una contradicción ya que $(\mathbb{C},+,\cdot)$ es un cuerpo, se concluye que no existe isomorfismo entre $(\mathbb{R}^2,\oplus,\odot)$ y $(\mathbb{C},+,\cdot)$.

P3 **(a)** Si tenemos $|z| = |z+1| = 1$, elevando al cuadrado se tiene que $|z|^2 = |z+1|^2 = 1$, recordando que para $z \in \mathbb{C}$ se tiene que $|z|^2 = z \cdot \overline{z}$, entonces

$$\begin{aligned} |z+1|^2 &= 1 \\ (z+1)\cdot\overline{(z+1)} &= 1 \\ (z+1)\cdot(\overline{z}+\overline{1}) &= 1 \\ (z+1)\cdot(\overline{z}+1) &= 1 \\ z\cdot\overline{z}+z+\overline{z}+1 &= 1 \\ |z|^2+z+\overline{z}+1 &= 1 \\ 1+z+\overline{z}+1 &= 1 \\ z &= -1-\overline{z} \end{aligned}$$

Por otra parte se tiene que

$$\begin{aligned} z^3 &= z^2\cdot z \\ &= z^2\cdot(-1-\overline{z}) && \backslash\text{usando la igualdad anterior} \\ &= -z^2 - z\cdot z\cdot\overline{z} \\ &= -z^2 - z\cdot|z|^2 \\ &= -z^2 - z \\ &= z(-z-1) \\ &= z\cdot\overline{z} && \backslash\text{usando la igualdad anterior} \\ &= |z|^2 \\ &= 1 \end{aligned}$$

Se concluye que z es raíz cúbica de la unidad.

(b) Sean $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$

$$\begin{aligned} |1-z_2\overline{z_1}|^2 - |z_1-z_2|^2 &= (1-z_2\overline{z_1})\overline{(1-z_2\overline{z_1})} - (z_1-z_2)\overline{(z_1-z_2)} \\ &= (1-z_2\overline{z_1})(\overline{1}-\overline{z_2\overline{z_1}}) - (z_1-z_2)(\overline{z_1}-\overline{z_2}) \\ &= (1-z_2\overline{z_1})(1-\overline{z_2}z_1) - (z_1-z_2)(\overline{z_1}-\overline{z_2}) \\ &= 1-\overline{z_2}z_1 - z_2\overline{z_1} + z_2\overline{z_1}z_1\overline{z_2} - (z_1-z_2)(\overline{z_1}-\overline{z_2}) \\ &= 1-\overline{z_2}z_1 - z_2\overline{z_1} + |z_1|^2|z_2|^2 - (z_1-z_2)(\overline{z_1}-\overline{z_2}) \\ &= 1-\overline{z_2}z_1 - z_2\overline{z_1} + |z_1|^2|z_2|^2 - (z_1\overline{z_1} - z_1\overline{z_2} - z_2\overline{z_1} + z_2\overline{z_2}) \\ &= 1-\overline{z_2}z_1 - z_2\overline{z_1} + |z_1|^2|z_2|^2 - (|z_1|^2 - z_1\overline{z_2} - z_2\overline{z_1} + |z_2|^2) \\ &= 1-\overline{z_2}z_1 - z_2\overline{z_1} + |z_1|^2|z_2|^2 - |z_1|^2 + z_1\overline{z_2} + z_2\overline{z_1} - |z_2|^2 \\ &= 1+|z_1|^2|z_2|^2 - |z_1|^2 - |z_2|^2 \\ &= (1-|z_1|^2) - |z_2|^2 + |z_1|^2|z_2|^2 \\ &= (1-|z_1|^2) - |z_2|^2(1-|z_1|^2) \\ &= (1-|z_1|^2)(1-|z_2|^2) \end{aligned}$$

(c) *Nota: Falta escribir la desigualdad, debe decir* $\frac{|z_1-z_2|}{|1-z_2\overline{z_1}|} < 1$.
Como se tiene que $|z_1| < 1$ y $|z_2| < 1$, elevando al cuadrado se deduce que $|z_1|^2 < 1$ y $|z_2|^2 < 1$, o lo que es lo mismo $(1-|z_1|^2) > 0$ y $(1-|z_2|^2) > 0$, si multiplicamos ambas desigualdades se tiene que

$$\begin{aligned}
(1-|z_1|^2)(1-|z_2|^2) &> 0 \\
|1-z_2\overline{z_1}|^2 - |z_1-z_2|^2 &> 0 \qquad \backslash \text{usando la igualdad anterior} \\
|1-z_2\overline{z_1}|^2 &> |z_1-z_2|^2 \qquad \backslash \cdot \frac{1}{|1-z_2\overline{z_1}|^2} \\
\frac{|1-z_2\overline{z_1}|^2}{|1-z_2\overline{z_1}|^2} &> \frac{|z_1-z_2|^2}{|1-z_2\overline{z_1}|^2} \\
1 &> \frac{|z_1-z_2|^2}{|1-z_2\overline{z_1}|^2} \\
1 &> \frac{|z_1-z_2|^2}{|1-z_2\overline{z_1}|^2} \qquad \backslash\sqrt{()} \\
1 &> \frac{||z_1-z_2||}{||1-z_2\overline{z_1}||} \\
1 &> \frac{|z_1-z_2|}{|1-z_2\overline{z_1}|}
\end{aligned}$$

P4 Por propiedad de los complejos si $z \in \mathbb{C}$ y $z = \overline{z}$ entonces $z \in \mathbb{R}$, procedemos entonces a obtener el conjugado de la expresión, llamemos $w = \frac{1}{1+z^n} + \frac{1}{1+\overline{z}^n}$, luego

$$
\begin{aligned}
\overline{w} &= \overline{\frac{1}{1+z^n} + \frac{1}{1+\overline{z}^n}} \\
&= \overline{\frac{1}{1+z^n}} + \overline{\frac{1}{1+\overline{z}^n}} && \backslash \overline{z_1+z_2} = \overline{z_1}+\overline{z_2} \\
&= \frac{\overline{1}}{\overline{1+z^n}} + \frac{\overline{1}}{\overline{1+\overline{z}^n}} && \backslash \left(\overline{\frac{z_1}{z_2}}\right) = \frac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}} \\
&= \frac{1}{\overline{1+z^n}} + \frac{1}{\overline{1+\overline{z}^n}} && \backslash \text{el conjugado de un número real es el mismo número} \\
&= \frac{1}{\overline{1}+\overline{z^n}} + \frac{1}{\overline{1}+\overline{\overline{z}^n}} \\
&= \frac{1}{1+\overline{z^n}} + \frac{1}{1+\overline{\overline{z}^n}} \\
&= \frac{1}{1+\overline{z}^n} + \frac{1}{1+\overline{\overline{z}}^n} && \backslash \overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2} \text{ inductivamente } \overline{z^n} = \overline{z}^n \\
&= \frac{1}{1+\overline{z}^n} + \frac{1}{1+z^n} && \backslash \overline{\overline{z}} = z \\
&= \frac{1}{1+z^n} + \frac{1}{1+\overline{z}^n} \\
&= w
\end{aligned}
$$

Se concluye que $w \in \mathbb{R}$.