

Introducción al Álgebra (2016-01)

Control 4 Primer Problema 1

Demuestre, sin usar inducción, que:

$$a) \sum_{i=0}^{m-1} \binom{m-1}{i} \binom{m}{j} = 2^{m-1} (2^m - 1)$$

En este caso el término general $a_{ij} = \binom{m-1}{i} \binom{m}{j}$ es el producto de términos que dependen en forma independiente de los índices.

$$b_{ij} \sum_{i=0}^{m-1} \binom{m-1}{i} \binom{m}{j} = \underbrace{\left(\sum_{i=0}^{m-1} \binom{m-1}{i} \right)}_{\text{Binomio}} \left(\sum_{j=1}^m \binom{m}{j} \right) = 2^{m-1} \sum_{j=1}^m \binom{m}{j}$$

$$= 2^{m-1} \left(\underbrace{\sum_{j=0}^m \binom{m}{j}}_{\substack{\text{Binomio} \\ (1+1)^m}} - \binom{m}{0} \right) = 2^{m-1} (2^m - 1)$$

b) Alambicando, es equivalente a probar $\sum_{k=1}^m \sum_{i=0}^{k-1} 3^i \binom{m}{k} = 2^{m-1} (2^m - 1)$

$$\text{En efecto } \sum_{k=1}^m \sum_{i=0}^{k-1} 3^i \binom{m}{k} = \sum_{k=1}^m \left[\binom{m}{k} \sum_{i=0}^{k-1} 3^i \right] = \sum_{k=1}^m \binom{m}{k} \frac{3^k - 1}{3 - 1} =$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{k=1}^m \binom{m}{k} (3^k - 1) = \frac{1}{2} \left[\underbrace{\sum_{k=0}^m \binom{m}{k} 3^k}_{\substack{\text{Binomio} \\ (3+1)^m}} - \underbrace{\sum_{k=0}^m \binom{m}{k}}_{\substack{\text{Binomio} \\ (1+1)^m}} + \underbrace{\binom{m}{0}}_1 \right]$$

$$= \frac{1}{2} [4^m - 1 - 2^m + 1] = \frac{2^m (2^m - 1)}{2} = 2^{m-1} (2^m - 1) \quad \text{según (a)}$$

$$= \sum_{i=0}^{m-1} \sum_{j=1}^m \binom{m-1}{i} \binom{m}{j}$$

Punto Problema 2

a) $A = \{(m^4 + 5)^n \mid m, n \in \mathbb{N}\}$. Demostrar que A es infinito numerable.

A es infinito: Por ejemplo, fijando $m=1$ y $n \in \mathbb{N}$ se tiene

(0.5) $A_{1,n} = \{6^n \mid n \in \mathbb{N}\}$ con $A_{1,n} \subseteq A$ y $A_{1,n}$ infinito ($|A_{1,n}| = |\mathbb{N}|$)

Entonces A es infinito y $(m^4 + 5)^n \in \mathbb{N} \quad \forall m, n \in \mathbb{N}$. Así, A es un subconjunto infinito de uno numerable ($\mathbb{N}$ es numerable) por lo tanto A es numerable

(1.5) $\rightarrow$

b) i) Sea $g: E \rightarrow F$ función. Probar que si $|E| = |\mathbb{N}|$ entonces $|g(E)| \leq |\mathbb{N}|$

E es infinito numerable y puede presentarse como

(0.5) $E = \{e_0, e_1, e_2, \dots, e_n, \dots\}$

Entonces $g(E) = \{g(e) \mid e \in E\}$ puede presentarse como

$g(E) = \bigcup_{e \in E} \{g(e)\}$, es decir, como la unión numerable

de conjuntos finitos (unitarios) y por lo tanto numerable.

(1.0)

Así $|g(E)| \leq |\mathbb{N}|$

ii) $\forall n \in \mathbb{N} \quad f_n: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ función $\sim f_1 = \text{id}_{\mathbb{R}}$. Sea $A \subseteq \mathbb{R}$ y

$B = \{f_n(a) \mid a \in A, n \in \mathbb{N}\}$. Probar que $|A| = |\mathbb{N}| \Rightarrow |B| = |\mathbb{N}|$

Primero, B es infinito, pues $A = f_1(A) = \{f_1(a) \mid a \in A\} \subseteq B$ y como

A es infinito y $A \subseteq B$, B es infinito.

Ahora para cada $n \in \mathbb{N}$ definimos $B_n = \{f_n(a) \mid a \in A\} = f_n(A)$

Entonces por lo visto en (i) $|B_n| = |f_n(A)| \leq |\mathbb{N}| \Rightarrow B_n$ es numerable.

Además: $B = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} B_n = \{b \in \mathbb{R} \mid \exists n \in \mathbb{N}, b \in B_n\}$. Así B es la unión numerable de conjuntos numerables y por lo tanto B es numerable.

(0.8)

(0.7)