

MA1101-5 Introducción al Álgebra

Profesor: José Soto San Martín.

Auxiliar: Ilana Mergudich Thal.

Fecha: Jueves 12 de Mayo del 2016



Auxiliar Extra: Recuperativo

Resumen, para que vean que no han aprendido poco:

- **Conjunto potencia:** Dado A un conjunto $P(A)$ es el conjunto de todos los subconjuntos de A .

$$X \in P(A) \Leftrightarrow X \subseteq A$$

Sea $f : A \rightarrow B$ una función.

- f es inyectiva $\Leftrightarrow (\forall x, y \in A) f(x) = f(y) \Rightarrow x = y$.
- f es sobreyectiva $\Leftrightarrow (\forall y \in B)(\exists x \in A) f(x) = y$.
- f es biyectiva $\Leftrightarrow f$ es inyectiva y sobreyectiva.
- Si f es biyectiva, tiene inversa f^{-1} , y es tal que $(\forall x \in A)(\forall y \in B)(f(x) = y \Leftrightarrow f^{-1}(y) = x)$.
- $g \circ f$ SOLO TIENE SENTIDO CUANDO $B \subseteq C$.
- $g \circ f$ inyectiva $\Rightarrow f$ inyectiva.
- $g \circ f$ sobreyectiva $\Rightarrow g$ sobreyectiva.
- $g \wedge f$ inyectivas $\Rightarrow f \circ g$ inyectiva.
- $g \wedge f$ sobreyectivas $\Rightarrow f \circ g$ sobreyectiva.
- $g \wedge f$ biyectivas $\Rightarrow f \circ g$ biyectiva con $(f \circ g)^{-1} = g^{-1} \circ f^{-1}$
- Dado $A' \subseteq A$, de define el conjunto **imagen de A'** como

$$f(A') = \{y \in B \mid (\exists x \in A') f(x) = y\}.$$

- Dado $B' \subseteq B$, de define el conjunto **preimagen de B'** como

$$f^{-1}(B') = \{x \in A \mid f(x) \in B'\}$$

- $f(A_1 \cup A_2) = f(A_1) \cup f(A_2)$.
- $\mathcal{R}$ es **refleja** ssi $(\forall x \in A) x\mathcal{R}x$.
- $\mathcal{R}$ es **simétrica** ssi $(\forall x, y \in A) x\mathcal{R}y \Rightarrow y\mathcal{R}x$.
- $\mathcal{R}$ es **antisimétrica** ssi $(\forall x, y \in A) (x\mathcal{R}y \wedge y\mathcal{R}x) \Rightarrow x = y$.
- $\mathcal{R}$ es **transitiva** ssi $(\forall x, y, z \in A) (x\mathcal{R}y \wedge y\mathcal{R}z) \Rightarrow x\mathcal{R}z$.
- $\mathcal{R}$ es relación de **orden** ssi es refleja, antisimétrica y transitiva.

- $\mathcal{R}$ es relación de **equivalencia** ssi es refleja, simétrica y transitiva.

- Si $\mathcal{R}$ es una relación de orden, diremos que es un **orden total** si para cada $x, y \in A$ $(x\mathcal{R}y \vee y\mathcal{R}x)$. De lo contrario, se dirá que es un **orden parcial**.

- Si $\mathcal{R}$ es de equivalencia y $x \in A$
 $[x]_{\mathcal{R}} = \{y \in A \mid x\mathcal{R}y\}$ es la **clase de equivalencia** de x asociada a $\mathcal{R}$.

- $A/\mathcal{R}$ es el conjunto de las clases de equivalencia inducidas por $\mathcal{R}$ y se le llama **conjunto cociente**.

- Inducción **primera forma**
 $[(\forall n \geq n_0)p(n)] \Leftrightarrow [p(n_0) \wedge (\forall n \geq n_0)(p(n) \Rightarrow p(n+1))]$.

- Inducción **segunda forma** $[(\forall n \geq n_0)p(n)] \Leftrightarrow [p(n_0) \wedge (\forall n \geq n_0)\{(\forall k, n_0 \leq k \leq n)p(k) \Rightarrow p(n+1)\}]$.

$$\sum_{k=1}^n k = \frac{n(n+1)}{2}.$$

$$\sum_{k=1}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

$$\sum_{k=1}^n k^3 = \frac{(n(n+1))^2}{4}.$$

- Suma telescópica: $\sum_{k=p}^q a_k - a_{k-1} = a_q + a_{p-1}$.

- Binomio de Newton: $(x+y)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k y^{n-k}$.

- Suma geométrica: $\sum_{k=0}^n r^k = \frac{r^{n+1} - 1}{r - 1}$, si $r \neq 1$.

- $|A| \leq |B| \wedge |B| \leq |A| \Leftrightarrow |A| = |B|$

- $A \subseteq B \Rightarrow |A| \leq |B|$

- Si A es infinito, entonces $|\mathbb{N}| \leq |A|$

- $\mathbb{Q}$ y $\mathbb{Z}$ son numerables.

- La unión numerable de conjuntos numerables es numerable.

- Si A, B son conjuntos numerables, entonces $A \times B$ es numerable.

P1. (*Funciones y sumatorias*) Considere las funciones $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ y $g : \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$ definidas por

$$f(n) = 1 - \sum_{k=0}^n \frac{k}{(k+1)!}, \quad (\forall n \in \mathbb{N})$$

$$g(x) = x^{-1}, \quad \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

- (a) Expresar $f(n)$ en función de n (resolver la suma).
- (b) Verificar de $\text{Im}(g \circ f) \subseteq \mathbb{N}$. ¿Es $g \circ f$ inyectiva/ epiyectiva/ biyectiva?. Justifique.

P2. (*Relaciones y cardinalidad*) Sea E un conjunto numerable. En $\mathcal{P}(E)$ se define la relación $\mathcal{R}$ por

$$A\mathcal{R}B \Leftrightarrow \exists f : A \rightarrow B, \text{ biyectiva}$$

- (i) Pruebe que $\mathcal{R}$ es relación de equivalencia.
- (ii) Demuestre que si $A \in \mathcal{P}(E)$ es un conjunto infinito, $[A]_{\mathcal{R}}$ es la colección de subconjuntos numerables, es decir $[A]_{\mathcal{R}} = \{X \subseteq E \mid X \text{ es numerable}\}$ de E . Indique justificando, dos elementos distintos de $[A]_{\mathcal{R}}$

P3. (*Funciones, Inducción y Conjuntos:*) Sea U conjunto universo y $A, B \subseteq U$. Se define:

$$\begin{aligned} f : \mathcal{P}(U) &\longrightarrow \mathcal{P}(U) \\ X &\longmapsto f(X) = A \cap (B \cup X) \end{aligned}$$

- (i) Pruebe de $f \circ f = f$
- (ii) Pruebe que $\forall n \geq 1) f^n = f$.
- (iii) Si $A \neq U$ o $B \neq \emptyset$, pruebe que f no es inyectiva.
- (iv) Si $A \neq U$ o $B \neq \emptyset$, pruebe que f no es sobreyectiva.
- (v) ¿Cómo sería f si fuese una función biyectiva?

P4. (*Inducción*) Determine el menor $n_0 \in \mathbb{N}$ a partir del cual es válida la desigualdad $3n + 2 < 2^n$.