MA1101-7 Introducción al Álgebra
Ilana Mergudich Thal
Ignacio Riego

Guía de Repaso

P1. *(Conjuntos)* Sea $A \subseteq E$ donde E es el conjunto universo, y tiene al menos dos elementos diferentes. Demuestre que: $[\forall B \in (P(E) \setminus \{\emptyset\})\ \ A \subseteq B] \Rightarrow A = \emptyset$.

P2. *(Conjuntos, Imagen y Preimagen)* Sea $f : E \to F$ una función. Demuestre que:

(a) $(\forall A, B \subseteq E)\ f(A) \setminus f(B) \subseteq f(A \setminus B)$.
(b) $[(\forall A, B \subseteq E)\ f(A) \setminus f(B) = f(A \setminus B)] \Leftrightarrow f$ es inyectiva.
(c) $(\forall Y \subseteq F)\ f(f^{-1}(Y)) \subseteq Y$.
(d) $[(\forall Y \subseteq F)\ Y = f(f^{-1}(Y))] \Leftrightarrow f$ es sobreyectiva.

P3. *(Relaciones y Funciones)* Se define en $\mathbb{Z}^2 \setminus \{0\}$ la relación $\mathcal{R}$ por $(x, y)\mathcal{R}(z, t) \Leftrightarrow xt = zy$.

(a) Demuestre que $\mathcal{R}$ es relación de equivalencia y describa explícitamente $[(0, 1)]_{\mathcal{R}}$ y $[(3, 3)]_{\mathcal{R}}$.
(b) Sea $f : \mathbb{Z}^2 \setminus \{0\} \to \mathbb{Q}$ definida por $f(x, y) = \frac{x}{y}$. Demuestre que $(x, y)\mathcal{R}(z, t) \Leftrightarrow f(x, y) = f(z, t)$.
(c) Demuestre que la función $F : (\mathbb{Z}^2 \setminus \{0\})/\mathcal{R} \to \mathbb{Q}$ dada por $F([(x, y)]_{\mathcal{R}}) = f(x, y)$ es biyectiva.
(d) ¿Es numerable el conjunto cuociente de $\mathbb{Z}^2 \setminus \{0\}$ sobre $\mathcal{R}$? Justifique.

P4. *(Inducción)* Usando inducción, demuestre que cada término de la secuencia 12, 102, 1002, 10002, ... es divisible por 6.

P5. *(Inducción y Sumatorias)* Calcule $\displaystyle\sum_{k=1}^{2n} (-1)^k k^2$ y luego demuestre su resultado por inducción.

P6. *(Funciones y Sumatorias)* Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $\forall x, y \in \mathbb{R}^+$, $f(\frac{x}{y}) = f(x) - f(y)$. Demuestre que

$$\sum_{i=1}^{n} f(1 + \frac{1}{i}) = f(n + 1).$$

P7. *(Sumatorias)* Pruebe que $\forall n, k \in \mathbb{N}$, $k \leq n$, $\binom{n}{k-1} = \frac{k}{n-k+1}\binom{n}{k}$ y calcule $\displaystyle\sum_{j=1}^{n} \frac{n - j + 1}{j} \binom{n}{j - 1}$.

P8. *(Sumatorias)* Calcule la siguiente sumatoria en función de α

$$\sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} cos(\alpha)^{2k} sin(\alpha)^{2n-2k}$$

P9. *(Funciones y Cardinalidad)* Se define el conjunto $\mathcal{F} = \{f : \mathbb{N} \to \mathbb{N} | f(0) = 0 \wedge \exists d \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, f(n + 1) = f(n) + d\}$. Demuestre que $\mathcal{F}$ es numerable.