MA1101-7 Introducción al Álgebra
Profesor: José Soto San Martín
Auxiliar: Ilana Mergudich Thal
Fecha: Miércoles 11 de Mayo del 2016

Auxiliar 9: Estructuras Algebraicas

Resumen:
Sea $(A, *)$ una estructura algebraica.

- $*$ es **asociativa** si:
  $(\forall x, y, z \in A)\ (x * y) * z = x * (y * z)$.
- Sea $e \in A$. Se dice que e es **elemento neutro** para $*$ si $(\forall a \in A)\ e * a = a * e = a$.
- Dado e neutro para $*$ y $x \in A$. Diremos que x tiene **inverso** si $(\exists y \in A)\ y * x = x * y = e$.
- $*$ es **conmutativa** si $(\forall x, y \in A)\ x * y = y * x$.
- $a \in A$ **absorbente** si $(\forall x \in A)\ a * x = x * a = a$
- $a \in A$ **idempotente** si $a * a = a$

P1. Estudie las propiedades (Existencia de neutro, absorbente, asociatividad y conmutatividad) de las siguientes estructuras algebraicas:

a) $(\mathcal{P}(E), \cap)$

b) $(\mathbb{N} \cup \{\infty\}, \text{máx})$, donde máx es la operación de máximo entre dos elementos.

c) $(\{Piedra,\ Papel,\ Tijera\}, \star)$, donde $\star$, entrega la que gana o empata en el cachipún.

P2. Se define en $\mathbb{R}^2$ la ley de composición interna $*$ por

$$(a, b) * (c, d) = (ac, bc + d).$$

a) Estudiar la conmutatividad y asociatividad de $*$.

b) Determine el neutro en $(\mathbb{R}^2, *)$.

c) Determine qué elementos son invertibles para $*$ y calcule sus inversos.

d) Determine los elementos idempotentes en $(\mathbb{R}^2, *)$.

P3. Consideremos $(A, *)$ una estructura algebraica asociativa en A. Sea $a \in A$ fijo, se define:

$$B = \{x \in A \mid a * x = x * a\}$$

Demuestre que:

a) $(\forall x, y \in B)\ x * y \in B$.

b) Si $e \in A$ es neutro, entonces $e \in B$.

c) Si $x \in B$ tiene inverso x^{-1}, entonces $x^{-1} \in B$

P4. *a*) Pruebe que todo intervalo de la forma (a, b) $a < b$ cumple que $|(a, b)| = |\mathbb{R}|$

b) Sea $A \subseteq \mathbb{R}$ un conjunto infinito no numerable y sea $\{A_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ una familia de conjuntos tales que $\cup_{i\in\mathbb{N}} A_i = A$. Demuestre que existe $k \in \mathbb{N}$ tal que A_k es infinito no numerable.

c) Pruebe que $\{0, 1\}^{\mathbb{N}}$ no es numerable.
Indicación: $\{0, 1\}^{\mathbb{N}} = \{0, 1\} \times \{0, 1\} \times \{0, 1\} \times \cdots \times \{0, 1\}$ *una cantidad numerable de veces. Además razone muuuuuy parecido a la demostración de* $[0, 1)$ *no numerable.*