PAUTA AUXILIAR EXTRA

P1)

$$\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{j}\sum_{k=0}^{i}\binom{i}{k}\frac{8^{k+1}}{3^{i}} = \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{j}\frac{1}{3^{i}}\sum_{k=0}^{i}\binom{i}{k}8^{k}\cdot 8$$

$$=8\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{j}\frac{1}{3^{i}}\underbrace{\sum_{k=0}^{i}\binom{i}{k}8^{k}\cdot 1^{i-k}}_{(8+1)^{i}}$$

Binomio de Newton

$$=8\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{j}\frac{9^{i}}{3^{i}} = 8\sum_{j=1}^{n}\underbrace{\sum_{i=1}^{j}3^{i}}_{\frac{1-3^{j+1}}{1-3}-1}$$

geométrica

$$=8\sum_{j=1}^{n}\frac{1-3^{j+1}}{-2}-1 = -4\sum_{j=1}^{n}1-3^{j+1} - 8\sum_{j=1}^{n} j$$

$$=-4\left[\sum_{j=1}^{n}1-\sum_{j=1}^{n}3^{j+1}\right]-8n = -4\left[n-3\sum_{j=1}^{n}3^{j}\right]-8n$$

$$=-4\left[n-3\left(\frac{1-3^{n+1}}{1-3}-1\right)\right]-8n$$

$$=-4n+\frac{12}{-2}\left(1-3^{n+1}\right)-12-8n$$

$$=-12n-18+6*3^{n+1}$$

P2)

$$\sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{k^2} \frac{n+k^2}{(n+j-1)(n+j)} = \sum_{k=1}^{n} n+k^2 \underbrace{\sum_{j=1}^{k^2} \frac{1}{(n+j-1)(n+j)}}_{\text{Desarrollemos esto}}$$

$$= \sum_{j=1}^{k^2} \frac{A}{(n+j-1)} + \frac{B}{(n+j)}$$

FRACCIONES PARCIALES

$$\frac{1}{(n+j-1)(n+j)} = \frac{A}{(n+j-1)} + \frac{B}{(n+j)}$$

$$\frac{1}{\cancel{(n+j)(n+j-1)}} = \frac{A(n+j)+B(n+j-1)}{\cancel{(n+j)(n+j-1)}}$$

$$1 = n(A+B) + j(A+B) - B$$

$$\Rightarrow \begin{matrix} A+B=0 \\ 1=-B \end{matrix} \Bigg\} \begin{matrix} B=-1 \\ A=1 \end{matrix}$$

$$= \sum_{j=1}^{k^2} \frac{1}{n+j-1} - \frac{1}{n+j}$$

telescópica

$$= \frac{1}{n+\cancel{1}-\cancel{1}} - \frac{1}{n+k^2} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+k^2}$$

Volviendo a la sumatoria inicial, queda:

$$\sum_{k=1}^{n} n+k^2\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+k^2}\right) = \sum_{k=1}^{n} \frac{n+k^2}{n} - 1$$

conocida.

$$= \sum_{k=1}^{n} \cancel{1} + \frac{k^2}{n} - \cancel{1} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{1}{\cancel{n}} \cdot \frac{\cancel{n}(n+1)(2n+1)}{6}$$

$$= \frac{(n+1)(2n+1)}{6}$$

P3

Una opción es que el insecto SIEMPRE decida saltar hasta la mitad. Esta es una opción de recorrido, llamémoslo R_∞.

Sino, puede saltar K veces hasta la mitad y en el salto $K+1$ completar el recorrido.
A cada uno de estos recorridos llamémoslos R_K, donde $K \in \mathbb{N}$

Es claro que $|\{R_0, R_1, \dots, R_n\}| = |\mathbb{N}|$
ya que $\exists R_K \ \forall K \in \mathbb{N}$. Por lo tanto,
$\{R_1, \dots, R_n\}$ es numerable.
Pero si agregamos 1 elemento a un conjunto numerable, este sigue siendo numerable y el único camino que falta en ese conjunto es R_∞

entonces: cantidad de recorridos $= |\{R_0, \dots, R_n\} \cup R_\infty| = |\mathbb{N}|$

$\therefore$ la colección total de recorridos es numerable.

P4) a) Sea $g: \mathcal{F} \to A^3$
$f \mapsto g(f) = (f(1), f(2), f(3))$

P.D.Q: g es Biyectiva

- P.D.Q: g es inyectiva

En efecto: $g(f_1) = g(f_2)$

$\Leftrightarrow (f_1(1), f_1(2), f_1(3)) = (f_2(1), f_2(2), f_2(3))$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} f_1(1) = f_2(1) \\ f_1(2) = f_2(2) \\ f_1(3) = f_2(3) \end{array}\right\}$$ como el dominio de f_1 y f_2 es $\{1,2,3\}$, entonces $f_1 = f_2$ //

$\therefore$ g es inyectiva

- P.D.Q: g es sobreyectiva

$\Leftrightarrow \forall (x,y,z) \in A^3 \quad \exists f \in \mathcal{F} \quad tq' \quad g(f) = (x,y,z)$

Basta tomar f tal que

$f(1) = x, \quad f(2) = y, \quad f(3) = z$

y claramente $g(f) = (x,y,z)$

$\therefore$ g es sobreyectiva

Ya que $g: \mathcal{F} \to A^3$ es Biyectiva, se concluye

que $|\mathcal{F}| = |A^3|$

b) si A es numerable, $A \times A \times A$ es numerable y como $|\mathcal{F}| = |A^3|$, $\mathcal{F}$ es numerable

P5) Sea $T = \{$Triángulos con vértices en $\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}\}$

P.D.Q $|T| = |\mathbb{N}|$

ya que los racionales son infinitos, existen infinitos triángulos con vértices en $\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$

$$\Rightarrow |\mathbb{N}| \leq |T|.$$

ahora sólo falta ver que $|T| \leq |\mathbb{N}|$

Sea
$$f : T \to \mathbb{Q} \times \mathbb{Q} \times \mathbb{Q} \times \mathbb{Q} \times \mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$$
$$\Delta \mapsto T(\Delta) = (a, b, c, d, e, f)$$
donde (a,b), (c,d) y (e,f) son los vértices del triángulo.

P.D.Q : f es inyectiva

En efecto: si tenemos 3 pares de vértices iguales a otros 3 pares, necesariamente los triángulos que describen son iguales

$$\therefore f \text{ inyectiva} \Rightarrow |T| \leq |\mathbb{Q}^6|$$

Pero como $|\mathbb{Q}| = |\mathbb{N}| \Rightarrow |\mathbb{Q}^6| = |\mathbb{N}|$

$$\Rightarrow |T| \leq |\mathbb{N}|$$

Como $|T| \leq |\mathbb{N}| \wedge |\mathbb{N}| \leq |T|$, necesariamente $|\mathbb{N}| = |T|$.