

MA1101-7 Introducción al Álgebra

Profesor: José Soto San Martín.

Auxiliar: Ilana Mergudich Thal.

Fecha: Miércoles 4 de Mayo.



Auxiliar 8: Cardinalidad

- | | |
|---|---|
| <ul style="list-style-type: none"> • $A \leq B \wedge B \leq A \Leftrightarrow A = B$ • $A \subseteq B \Rightarrow A \leq B$ • Si A es infinito, entonces $\mathbb{N} \leq A$ • $\mathbb{Q}$ y $\mathbb{Z}$ son numerables. | <ul style="list-style-type: none"> • La unión numerable de conjuntos numerables es numerable. • Si A, B son conjuntos numerables, entonces $A \times B$ es numerable. |
|---|---|

P1. Sean A, B, C conjuntos infinitos tales que $A \cap B = \emptyset$, $A \cap C = \emptyset$ y $|B| = |C|$. Demuestre que $|A \cup B| = |A \cup C|$.

P2. Sean A y B conjuntos no vacíos. Demuestre que $|A \times B| = |B \times A|$.

P3. Sea $\mathcal{C}$ el conjunto de todas las circunferencias en el plano cartesiano cuyos centros tienen coordenadas racionales y su radio es racional. Es decir, $C \in \mathcal{C} \Leftrightarrow C$ es una circunferencia de centro (a, b) y radio r con $a, b, r \in \mathbb{Q}$. Pruebe que el conjunto de todos los pares de puntos (P, Q) , donde P y Q son los extremos de los diámetros horizontales de las circunferencias de $\mathcal{C}$, es infinito numerable.

P4. Otra forma de definir $\binom{n}{k}$ es “El total de subconjuntos de k elementos que se pueden formar a partir de un conjunto de n elementos”.

- (a) Demuestre que para cualquier conjunto finito A , $|\mathcal{P}(A)| = 2^{|A|}$.
- (b) Demuestre, sin usar inducción, que $\forall n \in \mathbb{N}$, $n < 2^n$.

P5. Sea A un conjunto y $f : A \rightarrow \mathbb{N}$ una función. Demuestre que si $\forall n \in \mathbb{N}$, $f^{-1}(\{n\})$ es numerable, entonces A es numerable.