P1a | R en $\mathbb{N}$

$$mRn \iff \left[(m=n) \vee (\underbrace{2|m}_{\text{"m es par"}} \wedge \underbrace{2|n}_{\text{"n es par"}})\right]$$

$(mRn) \iff [(m=n) \vee (m$ y n son pares$)]$

1) P.D.Q R es de equivalencia (refleja, simétrica, transitiva)

- P.D.Q R es refleja.

Tenemos que ver si $\forall m \in \mathbb{N}$ mRm

$mRm \iff m=m \vee (2|m \wedge 2|m)$

Pero claramente $m=m$ $\forall m \in \mathbb{N}$ y por lo tanto mRm

$\therefore$ R es refleja

- P.D.Q R es simétrica

Tenemos que ver que $\forall m,n \in \mathbb{N}$ $mRn \Rightarrow nRm$.

Tomaremos la hipótesis (mRn) como V y demostraremos que nRm.

En efecto:

$$\begin{aligned} mRn &\iff (m=n) \vee (2|m \wedge 2|n) \\ &\iff (n=m) \vee (2|n \wedge 2|m) \\ &\iff nRm \, // \end{aligned}$$

$\therefore$ $mRn \Rightarrow nRm$

es decir,

R es simétrica.

• P.D.Q: R es transitiva

Tenemos que ver que $\forall x, y, z \in \mathbb{N}$

$xRy \wedge yRz \Rightarrow xRz$

Nuevamente tomaremos la hipótesis como verdadera y demostraremos que xRz ($x = z \vee x, z$ pares)

En efecto:

$xRy \iff (x = y) \vee (x \text{ par} \wedge y \text{ par})$
$yRz \iff (y = z) \vee (y \text{ par} \wedge z \text{ par})$

caso 1: $x = y \wedge y = z$

es directo entonces que $x = z$ con lo que se cumple que xRz

caso 2: $(x \text{ par} \wedge y \text{ par}) \wedge (y \text{ par} \wedge z \text{ par})$

con lo que se cumple $(x \text{ par} \wedge z \text{ par})$
y por lo tanto xRz

caso 3: $(x = y) \wedge (y \text{ par} \wedge z \text{ par})$

como $x = y$ y y es par, x también es par
$\therefore (x \text{ par} \wedge z \text{ par}) \Rightarrow xRz$

caso 4: $(x \text{ par} \wedge y \text{ par}) \wedge (y = z)$

como $y = z$ y y es par, z también es par

$\therefore (x \text{ par} \wedge z \text{ par}) \Rightarrow xRz$

En cualquier caso, $xRy \wedge yRz \Rightarrow xRz$

$\therefore$ R es transitiva

ya que R es simétrica, refleja y transitiva, podemos concluir que R es de equivalencia. //

2) Veamos primero cual es la clase de equivalencia del 0:

$[0]_R = \{m \in \mathbb{N} : 0Rm\}$

¿Pero quiénes se relacionan con 0?

$0Rm \Leftrightarrow (m=0) \vee (\underbrace{0 \text{ par}}_{\text{Pero esto siempre es V}} \text{ y } m \text{ par})$

$0Rm \Leftrightarrow (m=0) \vee (V \wedge m \text{ par})$

$0Rm \Leftrightarrow (m=0) \vee (m \text{ par})$

Pero el 0 también es par!

$\therefore$ $0Rm \Leftrightarrow m$ es par

$\Rightarrow [0]_R = \{m \in \mathbb{N} : m \text{ es par}\}$

Veamos ahora la del 1:

$[1]_R = \{m \in \mathbb{N} : 1Rm\}$

Pero $1Rm \iff (m=1) \vee (\underbrace{1 \text{ par}}_{F} \wedge m \text{ par})$

$1Rm \iff (m=1) \vee (F \wedge m \text{Par})$

$1Rm \iff (m=1) \vee F$

$1Rm \iff (m=1)$

$\Rightarrow [1]_R = \{1\}$

Veamos la del 2:

$[2]_R = \{m \in \mathbb{N} : 2Rm\}$

$2Rm \iff \underbrace{(m=2)}_{\text{es par}} \vee (\underbrace{2 \text{ Par}}_{V} \wedge m \text{ Par})$

$\therefore 2Rm \iff (m \text{ es par})$

$\Rightarrow [2]_R = \{m \in \mathbb{N} : m \text{ es Par}\}$

Pero esta es la misma que la del 0 !!!

y en realidad para cualquier par que tomemos.

y para cualquier número impar "x"

$$[x]_R = \{ m \in \mathbb{N} : xRm \}$$

$$xRm \iff (x=m) \vee \underbrace{(\underbrace{x \text{ par}}_{F} \wedge m \text{ par})}_{F}$$

$$xRm \iff (x=m) \quad (\text{como para el } 1)$$

Entonces las clases de equivalencia que existen son:

$[0]_R$ y $\underbrace{[x]_R}_{=\{x\}}$ $\forall x \in \mathbb{N}$ impar

P1 b) $f: A \to \mathbb{R}$ inyectiva $\quad x \Omega y \iff f(x) \leq f(y)$ en A

P.D.Q: Ω es de orden (refleja, antisimétrica y transitiva).

- P.D.Q: Ω es refleja

Veamos si $x \Omega x \quad \forall x \in A$

$x \Omega x \iff f(x) \leq f(x)$

Pero como $f(x) = f(x)$, también $f(x) \leq f(x) \quad \forall x \in A$

y por lo tanto se cumple que $\quad x \Omega x \quad \forall x \in A$

$\therefore \Omega$ es refleja

- P.D.Q: Ω es antisimétrica

Tenemos que ver que $x \Omega y \wedge y \Omega x \Rightarrow x = y \quad \forall x, y \in A$

Tomamos la hipótesis $(x \Omega y \wedge y \Omega x)$ como verdadera y tenemos que demostrar que $x = y$.

En efecto:

$x \Omega y \iff f(x) \leq f(y)$

$y \Omega x \iff f(y) \leq f(x)$

Pero para que $f(x) \leq f(y) \wedge f(y) \leq f(x)$, la única opción es que $f(x) = f(y)$

Pero además sabemos que f es inyectiva

$$\left[(\forall x,y \in A)\ f(x)=f(y) \Rightarrow x=y\right]$$

y como teníamos que $f(x)=f(y)$, entonces necesariamente $x=y$.

Entonces podemos concluir que $\forall x,y \in A\ \ x\Omega y \wedge y\Omega x \Rightarrow x=y$

$\therefore\ \Omega$ es antisimétrica.

- P.D.Q: Ω es transitiva

Tenemos que ver que $\forall x,y,z \in A$

$$x\Omega y \wedge y\Omega z \Rightarrow x\Omega z$$

Nuevamente tomamos la hipótesis como verdadera y queremos demostrar que $x\Omega z$, es decir, que $f(x) \leq f(z)$.

En efecto:

$$\left.\begin{array}{l} x\Omega y \Leftrightarrow f(x)\leq f(y) \\ y\Omega z \Leftrightarrow f(y) \leq f(z) \end{array}\right\}\ f(x) \leq f(y) \leq f(z)$$

$$\Rightarrow f(x) \leq f(z)$$

$\therefore\ \Omega$ es transitiva

ya que Ω es refleja, antisimétrica y transitiva, concluimos que Ω es de orden.

P2) a) P.D.Q $a_n = a\alpha^n + \alpha^{n-1}\sum_{k=0}^{n-1} \alpha^{-k} b_k$

* $a_0 = a \qquad a_{n+1} = \alpha a_n + b_n$ (★)

Paso 1: caso Base

$n = 1$

$a_1 = a_{0+1} = \underline{\alpha a_0 + b_0}$ (Por ★) y

$a\alpha^1 + \underbrace{\alpha^{1-1}}_{1} \underbrace{\sum_{k=0}^{1-1} \alpha^{-k} b_k}_{\text{esto es sólo el término 0}} = a\alpha + \underbrace{\alpha^{-0}}_{1} b_0 = \underline{a_0\alpha + b_0}$

y $\alpha a_0 + b_0 = \alpha a_0 + b_0$

$\therefore$ Para $n = 1$ $\quad a_n = a\alpha^n + \alpha^{n-1}\sum_{k=0}^{n-1} \alpha^{-k} b_k$

Paso 2: Hipótesis de inducción

Para algún $n \geq 1 \quad a_n = a\alpha^n + \alpha^{n-1}\sum_{k=0}^{n-1} \alpha^{-k} b_k$

Paso 3: Paso inductivo

P.D.Q $\quad a_{n+1} = a\alpha^{n+1} + \alpha^n \sum_{k=0}^{n} \alpha^{-k} b_k$

En efecto:

$$a_{n+1} = \alpha a_n + b_n \overset{H.I}{=} \alpha\left[a\alpha^n + \alpha^{n-1}\sum_{k=0}^{n-1}\alpha^{-k}b_k\right] + b_n$$

$$= a\alpha^{n+1} + \alpha^n \sum_{k=0}^{n-1} \alpha^{-k} b_k + b_n$$

$$= a\alpha^{n+1} + \alpha^n \sum_{k=0}^{n-1} \alpha^{-k} b_k + \underbrace{\alpha^n \cdot \alpha^{-n}}_{=1} \cdot b_n$$

Lo hacemos aparecer para poder factorizar por α^n y juntar el b_n con la sumatoria

$$= a\alpha^{n+1} + \alpha^n\left(\sum_{k=0}^{n-1}\alpha^{-k}b_k + \underbrace{\alpha^{-n}b_n}_{\text{Término } n}\right)$$

$$= a\alpha^{n+1} + \alpha^n \sum_{k=0}^{n} \alpha^{-k} b_k$$

//

$$\therefore \forall n \geq 1 \quad a_n = a\alpha^n + \alpha^{n-1}\sum_{k=0}^{n-1}\alpha^{-k}b_k$$

P2) b) P.D.Q $\forall n \geq 1$

$$\sum_{k=1}^{2n} (-1)^k k^2 = \sum_{k=1}^{n} (4k-1)$$

Paso 1: <u>caso Base</u>

$n=1$

$$\sum_{k=1}^{2\cdot 1} (-1)^k k^2 = \sum_{k=1}^{2} (-1)^k k^2 = \overbrace{(-1)^1 \cdot 1^2}^{\text{término 1}} + \overbrace{(-1)^2 \cdot 2^2}^{\text{término 2}}$$

$$= -1 \cdot 1 + 1 \cdot 4 = -1 + 4 = 3$$

$$\sum_{k=1}^{1} (4k-1) = 4 \cdot 1 - 1 = 4 - 1 = 3$$

$\therefore$ para $n=1$ $\sum_{k=1}^{2n} (-1)^k k^2 = \sum_{k=1}^{n} (4k-1)$

Paso 2: Hipótesis de inducción:

Para algún $n \geq 1$ se cumple que $\sum_{k=1}^{2n} (-1)^k k^2 = \sum_{k=1}^{n} (4k-1)$

Paso 3 : Paso inductivo

P. D. Q $$\sum_{k=1}^{2(n+1)} (-1)^k k^2 = \sum_{k=1}^{n+1} (4k-1)$$

En efecto :

$$\sum_{k=1}^{2n+2} (-1)^k k^2 = \sum_{k=1}^{2n} (-1)^k k^2 + \overbrace{(-1)^{2n+1} (2n+1)^2}^{\text{término } 2n+1} + \overbrace{(-1)^{2n+2} (2n+2)^2}^{\text{Término } 2n+2}$$

* 2n+1 es impar $\therefore (-1)^{2n+1} = -1$

* 2n+2 es Par $\therefore (-1)^{2n+2} = 1$

$$\overset{H.I}{=} \sum_{k=1}^{n} (4k-1) + (-1)(2n+1)^2 + (1)(2n+2)^2$$

$$= \sum_{k=1}^{n} (4k-1) - (4n^2+4n+1) + (4n^2+8n+4)$$

$$= \sum_{k=1}^{n} (4k-1) - \cancel{4n^2} - 4n - 1 + \cancel{4n^2} + 8n + 4$$

$$= \sum_{k=1}^{n} (4k-1) + \underbrace{4n+3}$$

queremos que esto sea
el término n+1 para completar la sumatoria
que buscamos.

Pero cual es el término n+1 ? Es $4(n+1)-1 = 4n+4-1 = 4n+3$

Es justo lo que buscamos!

Entonces

$$\sum_{k=1}^{n}(4k-1) + 4n+3 = \sum_{k=1}^{n}(4k-1) + \underbrace{4(n+1)-1}_{\text{término } n+1}$$

$$= \sum_{k=1}^{n+1}(4k-1)$$

//

$$\therefore\ \forall n \geq 1 \quad \sum_{k=1}^{2n}(-1)^k k^2 = \sum_{k=1}^{n}(4k-1)$$