P1

$\therefore \; (1+x)^n \geq 1+nx \quad \forall n \in \mathbb{N}$

CB $n=0$

$$(1+x)^0 = 1 \geq 1 + 0x = 1 \quad V$$

HI $(1+x)^n \geq 1+nx$

PDQ: $(1+x)^{n+1} \geq 1+(n+1)x$

$$\begin{aligned}(1+x)^{n+1} &= (1+x)^n (1+x) \quad (HI) \\ &\geq (1+nx)(1+x) \quad \triangle \\ &= 1+nx+x+nx^2 \\ &= 1+x(n+1) + \underbrace{nx^2}_{\text{ALGO POSITIVO!}} \\ &\geq 1+x(n+1)\end{aligned}$$

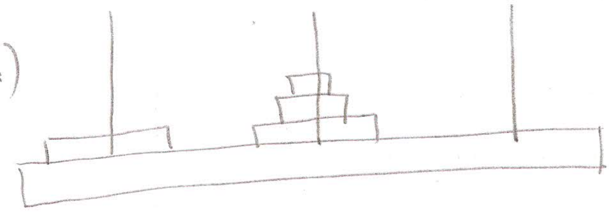
$\therefore \; (1+x)^n \geq 1+nx$

OJO! $\triangle$ ES VERDAD SOLO PORQUE $x \geq -1 \Rightarrow x+1 \geq 0$
CUANDO TENGO DESIGUALDADES POSITIVAS SE PUEDEN MULTIPLICAR Y SE MANTIENE LA DESIGUALDAD.

P2) tenemos

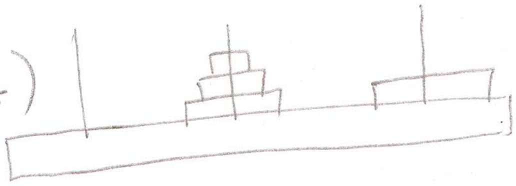
COMO NUNCA PODEMOS TENER UN GRANDE SOBRE UN CHICO NECESARIAMENTE TENGO QUE LOGRAR ESTA SITUACIÓN

(*)

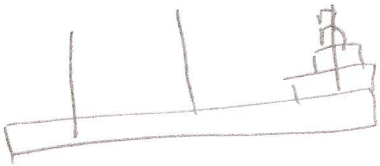


Y ASÍ

(**)



=>



(***)

ES DECIR PARA MOVER "n+1" TENGO QUE MOVER "n" DISCOS A LA SEGUNDA MOVER EL n+1 A LA TERCERA Y LUEGO VOLVER A MOVER LOS "n" A LA TERCERA

SI LLAMAMOS $P(n+1)$ A LA CANTIDAD DE MOVIMIENTOS necesarios para mover n+1 discos tenemos

$$P(n+1) = \underset{(*)}{P(n)} + \underset{(**)}{1} + \underset{(***)}{P(n)}$$

$$P(n+1) = 2P(n) + 1$$

ESTO ES LO QUE LLAMAMOS UNA SUCESIÓN RECURRENTE CUANDO MI ESTADO DEPENDE DEL ANTERIOR

POR EJEMPLO si $P(n) = 6$

$\Rightarrow P(n+1) = 13$

$\Rightarrow P(n+2) = 27$

$\Rightarrow P(n+3) = 55$

$\Rightarrow P(n+100) = ?$

NO ME DIGAS QUE TENGO QUE CALCULAR TODOS LOS $P(n+4), \ldots, P(n+99)$ LA VERDAD ES QUE ESA ES UNA OPCIÓN, LA OTRA ES APRENDER QUÉ TODA SUCESIÓN RECURRENTE PUEDES ESCRIBIRLA COMO UNA SUCESIÓN NO RECURRENTE (ESTO LO ESTUDIARÁN MÁS EN CÁLCULO)

EN ESTE CASO QUEREMOS VER QUE

$$P(n) = 2^n - 1$$

¿Y CÓMO SE ME HIBA A OCURRIR ESO? TRANQUILO EN ESTE CURSO SIEMPRE TE DARÁN LA FÓRMULA, LO QUE NOSOTROS HAREMOS ES DEMOSTRAR QUE EFECTIVAMENTE SON LO MISMO Y PARA ELLO USAMOS INDUCCIÓN (LA RESPUESTA A LA PREGUNTA RECIÉN COMIENZA, LO OTRO FUE INTRODUCCIÓN FREAK).

PDQ : $P(n) = 2^n - 1$

CASO BASE: $P(0) = 2^0 - 1 = 1 - 1 = 0$ //

ESTO ES VERDAD PUES PARA MOVER 0 DISCOS DEBO HACER 0 MOVIMIENTOS.

HI : $P(n) = 2^n - 1$

UNO ASUME QUE SE CUMPLE PARA n, Y VÉ QUE PASA PARA $n+1$

Pero subemos que

$$P(n+1) = 2P(n) + 1$$ uno usa la HI.

$$= 2(2^n - 1) + 1$$

$$= 2 \cdot 2^n - 2 + 1$$

$$= 2^{n+1} - 2 + 1$$

$$= 2^{n+1} - 1 \quad //$$

$\therefore$ se cumple para el caso base, y cada vez que se cumple para un "n" se cumple para "n+1"

$\therefore$ se tiene $\forall n \in \mathbb{N}$.

Esto es el PPO. de Inducción.

P3) PDQ: $4^{2n+1}+3^{n+2}$ es múltiplo de 13

CB: $n=0$, $4^{2\cdot 0+1}+3^{0+2}=4+9=13=13\cdot 1$

HI: $4^{2n+1}+3^{n+2}=13K$ con $K\in\mathbb{Z}$

(recuerda que a es multiplo de b si b multiplicado por un entero da a, por ej -21 es múltipló de 7 pues $7\cdot -3=-21$)

PDQ: $4^{2(n+1)+1}+3^{(n+1)+2}=13H$, $H\in\mathbb{Z}$

LOS PROBLEMAS POR INDUCCIÓN SON TODOS IGUALES: TOMAR LO QUE HAY QUE DEMOSTRAR, MATRAQUEAR, Y USAR MAGIA PARA HACER APARECER LA HI.

TRUCO TÍPICO, TEOREMA:

NIKITA-NIPONE: $x+-x=0$ (NN para los amigos)

$\Rightarrow a+x+-x=a$

$$4^{2(n+1)+1} + 3^{(n+1)+2}$$

$$= 4^{2n+2+1} + 3^{n+1+2}$$

$$= 4^{2n+3} + 3^{n+3}$$

mmm... mí HI es $4^{2n+1} + 3^{n+2}$

COMO QUE EL EXPONENTE ES CASI IGUAL

$$= 4^{2n+1+2} + 3^{n+3}$$

$$= 4^{2n+1} \cdot 4^2 + 3^{n+3}$$

$$= 16\left(4^{2n+1}\right) + 3^{n+3}$$

mmm... EL EXPONENTE YA ES IGUAL!

AHORA SOLO HAY QUE ARREGLAR EL DEL 3! :) NO!

YO NECESITO QUE 3^{n+2} ESTÉ SUMANDO AL 4^{2N+1} NO a $16(4^{2n+1})$

Y AHORA ES CUANDO USAMOS NN.

$$= 16\left(4^{2n+1} + 3^{n+2} - 3^{n+2}\right) + 3^{n+3}$$

$$= 16\underbrace{\left(4^{2n+1} + 3^{n+2}\right)}_{\text{Y AHORA SÍ TENEMOS LA HI}} - 16 \cdot 3^{n+2} + 3^{n+3}$$

¡¡!!

$$= 16 \cdot 13K - 16 \cdot 3^n \cdot 9 + 3^n \cdot 27$$

$$= 16 \cdot 13K - 3^n\left(16 \cdot 9 - 27\right)$$

$$= 16 \cdot 13K - 3^n \cdot 9 \cdot 13$$

$$= 13\underbrace{\left(16 \cdot 3K - 9 \cdot 3^n\right)}$$

fijate que por muy feo que sea eso son ENTEROS! y álgebra de ENTEROS DA ENTERO

$$= 13\,H \;//$$

OTRA FORMA SI NO TE GUSTA EL NN

$$16\left(4^{2n+1}\right) + 3^{n+3} = \overbrace{16}^{13+3}\left(4^{2n+1}\right) + 3\left(3^{n+2}\right)$$

$$= 3 \cdot 4^{2n+1} + 3 \cdot 3^{n+2} + 13 \cdot 4^{2n+1} = 3\left(4^{2n+1} + 3^{n+2}\right) + 13 \cdot 4^{2n+1}$$

$$= 3 \cdot 13K + 13 \cdot 4^{2n+1} = 13\,H \;//$$

P4

PDQ : $\displaystyle\sum_{K=1}^{2n} (-1)^K (2K+1) = 2n$

CB : $n = 1$

$$\sum_{K=1}^{2} (-1)^K (2K+1)$$

$$= (-1)^1 (2 \cdot 1 + 1) + (-1)^2 (2 \cdot 2 + 1)$$

$$= -1(3) + 1(5) = 2 = 2 \cdot 1 \;// \checkmark$$

HI : $\displaystyle\sum_{K=1}^{2n} (-1)^K (2K+1) = 2n$

PDQ $\displaystyle\sum_{K=1}^{2(n+1)} (-1)^K (2K+1) = 2(n+1)$

$$\sum_{K=1}^{2(n+1)} (-1)^K (2K+1) = \sum_{K=1}^{2n+2} (-1)^K (2K+1)$$

$$= \overbrace{(-1)^1 (2 \cdot 1 + 1) + \dots + (-1)^{2n} (2 \cdot 2n + 1)}^{*}$$

$$+ (-1)^{2n+1} (2 \cdot (2n+1) + 1) + (-1)^{2n+2} (2(2n+2)+1)$$

Pero ✱ $= \sum_{k=1}^{2n} (-1)^k (2k+1)$

Por lo tanto lo de antes

$$= \sum_{k=1}^{2n} (-1)^k (2k+1) + (-1)^{2n+1}(2(2n+1)+1) + (-1)^{2n+2}(2(2n+2)+1)$$

$$\overset{HI}{=} 2n + (-1)^{2n+1}(2(2n+1)+1) + (-1)^{2n+2}(2(2n+2)+1)$$

Notemos que $2n+1$ es impar!
y que $2n+2$ es par!

$$\Rightarrow (-1)^{2n+1} = (-1) \wedge (-1)^{2n+2} = (1)$$

$$= 2n - (2(2n+1)+1) + (2(2n+2)+1)$$

$$= 2n - (4n+3) + (4n+5)$$

$$= 2n - \cancel{4n} - 3 + \cancel{4n} + 5$$

$$= 2n + 2$$

$$= 2(n+1) \quad //$$

$$\therefore \sum_{k=1}^{2n} (-1)^k (2k+1) = 2n \quad \forall n \geq 1$$

//

P5 CB: $n=1$ (¿Porqué? porque lo que quieres demostrar es $\forall n \geq 1$)

$$\sum_{i=1}^{1} F_i = F_1 = F_{1+2} - 1 = F_3 - 1$$

¿y quién es F_3? $F_3 = F_2 + F_1 = F_2 + 1$

¿y F_2? $F_2 = F_1 + F_0 = 1 + 0 = 1$

$\Rightarrow F_3 = 2$

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^{1} F_i = F_1 \overset{?}{=} 1 = F_3 - 1 = 2 - 1 \quad // \checkmark$$

HI: $\sum_{i=1}^{n} F_i = F_{n+2} - 1$

PDQ: $\sum_{i=1}^{n+1} F_i = F_{n+3} - 1$

$$\sum_{i=1}^{n+1} F_i = \underbrace{F_1 + F_2 + \ldots + F_n}_{} + F_{n+1}$$

$$= \sum_{i=1}^{n} F_i + F_{n+1}$$

$$\overset{HI}{=} F_{n+2} - 1 + F_{n+1}$$

$$= F_{n+2} + F_{n+1} - 1$$

$$= F_{n+3} - 1 \quad // \quad \therefore \sum_{i=1}^{n} F_i = F_{n+2} - 1 \ \forall n \geq 1$$

PDQ $F_n > \left(\frac{3}{2}\right)^{n-1}, \forall n \geq 6$

CB: $n=6$

$F_6 = 8 > \left(\frac{3}{2}\right)^5 \sim 7,5$ //

HI: $F_n > \left(\frac{3}{2}\right)^{n-1}$

PDQ $F_{n+1} > \left(\frac{3}{2}\right)^n$

$$F_{n+1} = F_n + F_{n-1}$$

$$F_n > \left(\frac{3}{2}\right)^{n-1}$$

¡OJO! la inducción normal SOLO PERMITE ASUMIR PARA EL ANTERIOR

$$¿F_{n-1} > \left(\frac{3}{2}\right)^{n-2}?$$

PERO PARA ESO ESTÁ LA INDUCCIÓN FUERTE

UNO ASUME QUE SE CUMPLE PARA TODOS LOS ANTERIORES.

ENTONCES LA REAL HI ES

$$F_{n_0} > \left(\frac{3}{2}\right)^{n_0-1} \quad \forall\, n_0 < n+1$$

Y AHORA SÍ $F_{n-1} > \left(\frac{3}{2}\right)^{n-2}$

$$\Rightarrow F_{n+1} = F_n + F_{n-1} > \left(\frac{3}{2}\right)^{n-1} + \left(\frac{3}{2}\right)^{n-2} \text{ (POR HI)}$$

$$= \left(\frac{3}{2}\right)^{n}\left(\frac{2}{3} + \frac{4}{9}\right)$$

$$= \left(\frac{3}{2}\right)^{n}\left(\frac{10}{9}\right)$$

$$\wedge \ \frac{10}{9} > 1$$

$$> \left(\frac{3}{2}\right)^{n}$$

$$\Rightarrow F_{n+1} > \left(\frac{3}{2}\right)^{n} \ //$$

$$\therefore F_n > \left(\frac{3}{2}\right)^{n-1} \quad \forall n \geq 6 \ //$$