MA1101-7 Introducción al Álgebra
Profesor: José Soto San Martín.
Auxiliar: Ilana Mergudich Thal.
Fecha: Miércoles 20 de Abril.

Auxiliar Extra: Control 3

P1. Sea $\mathcal{R}$ la relación en $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ definida por:

$$(a,b)\mathcal{R}(c,d) \Leftrightarrow a+b \equiv_2 c+3d$$

(a) Pruebe que $\mathcal{R}$ es relación de equivalencia.

(b) Muestre que $[(0,0)]_{\mathcal{R}} \cup [(1,0)]_{\mathcal{R}} = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ y que $[(0,0)]_{\mathcal{R}} \cap [(1,0)]_{\mathcal{R}} = \emptyset$.

(c) Determine $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/\mathcal{R}$.

P2. Dados $a, b \in \mathbb{N}$ fijos, con $a \geq 1$ y $b \geq 2$ se define en $\mathbb{Z}$ la relación $\mathcal{R}$ por:

$$x\mathcal{R}y \Leftrightarrow b|ax+y, \text{ es decir, } b \text{ divide a } ax+y$$

(a) Demuestre que $\mathcal{R}$ es refleja si y sólo si $b|(a+1)$.

(b) Demuestre que si $\mathcal{R}$ es simétrica, entonces $b|(a^2-1)$.

(c) *[Propuesto]*Demuestre que para $a=3$ y $b=4$, $\mathcal{R}$ es relación de equivalencia y encuentre $\mathbb{Z}/\mathcal{R}$

P3. Sea la sucesión definida por:

$$a_1 = 1, \quad a_{n+1} = a_n + \frac{1}{1+n}, \forall n \geq 1.$$

Pruebe usando inducción que

$$\sum_{i=1}^{n} a_i = (n+1)a_n - n$$

P4. Demuestre por inducción que $(\forall n \geq 1) \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} \geq \frac{3}{2} - \frac{1}{n+1}$.

P5. Se sabe que

$$\sum_{k=1}^{n} a_k a_{k+1} = b_n$$

. Muestre que:

$$\sum_{k=1}^{n} a_k a_{k-1} = b_n + a_1 a_0 - a_{n+1} a_n \qquad \text{y que} \qquad \sum_{k=n}^{2n+1} a_k a_{k+1} = b_{2n+1} - b_{n-1}$$

P6. *[Propuesto]* Sea $f : A \to B$ una función y $\mathcal{R}$ una relación de orden en B. Se define la relación Ω en A como $x\Omega y \Leftrightarrow f(x)\mathcal{R}f(y)$. Demuestre que Ω es una relación de orden en A si y solo si f es inyectiva.

P7. *[Propuesto]* Sean x, y dos números reales distintos. Demuestre por inducción que

$$(\forall n \in \mathbb{N})(x-y) \text{ es factor de } x^n - y^n.$$