Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas — Universidad de Chile

MA1101-7 Introducción al Álgebra
Profesor: José Soto San Martín.
Auxiliar: Ilana Mergudich Thal.
Fecha: Miércoles 20 de Abril.

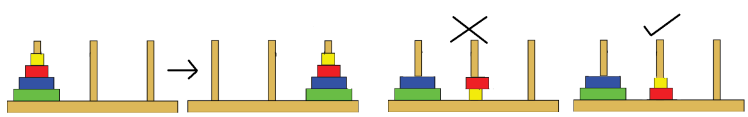
Auxiliar 6: Inducción

Resumen:

- **Primera Forma**: $[(\forall n \geq n_0)p(n)] \Leftrightarrow [p(n_0) \wedge (\forall n \geq n_0)(p(n) \Rightarrow p(n+1))]$.
- **Segunda Forma**: $[(\forall n \geq n_0)p(n)] \Leftrightarrow [p(n_0) \wedge (\forall n > n_0)\{(\forall k, n_0 \leq k < n)p(k)] \Rightarrow p(n)\}]$.

P1. Demuestre que $(1+x)^n \geq 1 + nx$ $\forall n \in \mathbb{N}$ para $x \geq -1$ fijo.

P2. Una "Torre de Hanoi" es un juego consistente de n anillos de distintos tamaños y tres estacas verticales fijas en un tablero, en las que se colocan los anillos. Al iniciar el juego todos los anillos están en una estaca, apilados de mayor a menor. El juego consiste en trasladar los anillos a la tercera estaca, para obtener una pila igual a la original. La complicación es que los anillos se pueden mover sólo de a 1 y nunca puede haber una anillo más grandes sobre otro más pequeño.



Demuestre que la cantidad de pasos mínimos para ganar el juego está dado por la expresión:

$$p(n) = 2^n - 1$$

P3. Demuestre por inducción que $\forall n \geq 0$ el número $4^{2n+1} + 3^{n+2}$ es múltiplo de 13.

P4. Demuestre por inducción que para todo $n \geq 1$

$$\sum_{k=1}^{2n} (-1)^k (2k+1) = 2n$$

P5. Recuerde que la sucesión de Fibonacci es una serie de números naturales $F_0, F_1, ..., F_n, F_{n+1}...$ que cumplen que: $F_0 = 0$, $F_1 = 1$ y $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$ $\forall n \geq 2$. Demuestre que:

(a) $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} F_i = F_{n+2} - 1, \ \forall n \geq 1$

(b) $F_n > \left(\dfrac{3}{2}\right)^{n-1}, \ \forall n \geq 6$