Introducción al Algebra - Control 2
Pauta Problema 1

a) $f: A \to B$ y $g, h: B \to A$ tales que $g \circ f = id_A \wedge f \circ h = id_B$

i) Demostrar que f es biyectiva

En efecto, $g \circ f$ y $f \circ h$ son identidades y por lo tanto

0.5 son biyectivas, entonces, por propiedades vistas

$$\left.\begin{array}{l} g \circ f \text{ inyectiva} \Rightarrow f \text{ inyectiva} \\ f \circ h \text{ sobreyectiva} \Rightarrow f \text{ sobreyectiva} \end{array}\right\} \Rightarrow f \text{ es biyectiva}$$

1.5

ii) Probar que $g = h = f^{-1}$

En efecto, sea $f^{-1}: B \to A$ inversa de f.

Composición de $g \circ f = id_A$ con $f^{-1} \Rightarrow (g \circ f) \circ f^{-1} = id_A \circ f^{-1}$

1.0 $\overset{\text{Asociativ}}{\Rightarrow} g \circ \underbrace{(f \circ f^{-1})}_{id_B} = f^{-1} \Rightarrow \underbrace{g \circ id_B}_{g} = f^{-1} \Rightarrow g = f^{-1}$

Analogamente $f \circ h = id_B \overset{f^{-1}\circ /}{\Rightarrow} f^{-1} \circ (f \circ h) = \underbrace{f^{-1} \circ id_B}_{f^{-1}}$ (Asociativ)

1.0 $\Rightarrow (f^{-1} \circ f) \circ h = f^{-1} \Rightarrow id_A \circ h = f^{-1} \Rightarrow h = f^{-1}$

b) $E \neq \phi \wedge \varphi: E \to E$. Dem q': $[\forall X \subseteq E, \varphi^{-1}(X) = X] \Leftrightarrow \varphi = id_E$

($\Rightarrow$) $\forall x \in E$ podemos definir $X \subseteq E$ como $X = \{x\}$

1.0 Por hipótesis $\forall X \subseteq E$, $\varphi^{-1}(X) = X$, entonces $\varphi^{-1}(\{x\}) = \{x\}$

de donde, como $x \in \{x\} \Rightarrow x \in \varphi^{-1}(\{x\}) \Rightarrow \varphi(x) \in \{x\} \Rightarrow \varphi(x) = x \; \forall x$

es decir $\varphi = id_E$

($\Leftarrow$) $\varphi^{-1}(X) = \{a \in E \mid \varphi(a) \in X\} \overset{\varphi = id_E}{=} \{a \in E \mid a \in X\} = X$

1.0 así $\forall X \subseteq E \quad \varphi^{-1}(X) = X$.

Pauta Problema 2

$f : A \times A \longrightarrow A$ y $g : A \longrightarrow A \times A$

$(x,y) \longrightarrow f(x,y) = x$ $\quad x \longrightarrow g(x) = (x,x)$

i) Demostrar que $f \circ g = id_A$.

0.5 En efecto, $f \circ g : A \to A$, $id_A : A \to A$

además $(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(x,x) = x = id_A(x)$

1.5 es decir $f \circ g = id_A$

ii) Determinar si f, g son inyect., sobreyec., biyectivas.

Se puede usar la parte (i) donde $f \circ g = id_A$, es decir $f \circ g$ es biyectiva, entonces

$f \circ g$ inyectiva $\Rightarrow g$ inyectiva

1.0 $f \circ g$ sobreyectiva $\Rightarrow f$ sobreyectiva

Además g no es sobreyectiva pues los pares $(x,y) \in A \times A$ no tienen preimagen

f no es inyectiva pues, por ejemplo, para $(x,u), (x,v) \in A \times A$

$(x,u) \neq (x,v)$ pero $f(x,u) = x = f(x,v)$

1.0 Finalmente f y g no son biyectivas.

iii) ¿Es $g \circ f = id_{A \times A}$?

0.5 $g \circ f : A \times A \to A \to A \times A$ $\wedge$ $id_{A \times A} : A \times A \to A \times A$

ambos tienen igual dominio $(A \times A)$ y codominio $(A \times A)$

PERO $(g \circ f)(x,y) = g(f(x,y)) = g(x) = (x,x) \neq id_{A \times A}(x,y) = (x,y)$

1.5 Sigue que $g \circ f \neq id_{A \times A}$