

P11 P.D.Q: R es una relación de equivalencia

$\Leftrightarrow R$ es reflexiva, simétrica y transitiva.

• P.D.Q: R es reflexiva

$$\Leftrightarrow (x,y)R(x,y) \quad \forall (x,y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N} \setminus \{0\}$$

$$(x,y)R(x,y) \Leftrightarrow xy = xy$$

ya que se cumple que $xy = xy \quad \forall (x,y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N} \setminus \{0\}$,
 R es reflexiva.

• P.D.Q R es simétrica

$$\Leftrightarrow (x,y)R(w,z) \Rightarrow (w,z)R(x,y) \quad \forall (x,y)(w,z) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N} \setminus \{0\}$$

En efecto: $(x,y)R(w,z)$

$$\Leftrightarrow xz = yw$$

$$\Leftrightarrow yw = xz$$

$$\Leftrightarrow wy = zx$$

$$\Leftrightarrow (w,z)R(x,y)$$

$$\therefore (x,y)R(w,z) \Leftrightarrow (w,z)R(x,y)$$

En particular

$$(x,y)R(w,z) \Rightarrow (w,z)R(x,y)$$

$\therefore R$ es simétrica.

• P.D.Q R es transitiva

$$\Leftrightarrow [(x,y)R(w,z) \wedge (w,z)R(u,v)] \Rightarrow (x,y)R(u,v)$$

En efecto:

$$(x,y)R(w,z) \Leftrightarrow xz = yw$$

$$\Rightarrow \frac{w}{z} = \frac{x}{y} \quad \begin{array}{l} \text{+ es posible porque} \\ z,y \in \mathbb{N} \setminus \{0\} \end{array}$$

$$(w,z)R(u,v) \Leftrightarrow wv = zu$$

$$\Rightarrow \frac{w}{z} = \frac{u}{v} \quad \begin{array}{l} \text{* es posible} \\ \text{porque} \\ z,v \in \mathbb{N} \setminus \{0\} \end{array}$$

$$\Rightarrow \frac{x}{y} = \frac{w}{z} = \frac{u}{v} \Rightarrow \frac{x}{y} = \frac{u}{v} \Rightarrow xv = uy$$

$$\Leftrightarrow (x,y)R(u,v)$$

$$\therefore [(x,y)R(w,z) \wedge (w,z)R(u,v)] \Rightarrow (x,y)R(u,v)$$

$\therefore R$ es transitiva.

ya que R es reflexiva, simétrica y transitiva, podemos concluir que R es una relación de equivalencia

SÓLO FALTA ENCONTRAR $[(0,2)]_R$, es decir $\{(x,y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N} \setminus \{0\} : (0,2) R (x,y)\}$

En efecto: $(0,2) R (x,y) \Leftrightarrow 0 \cdot y = 2x$

$$\Leftrightarrow 0 = 2x \Rightarrow x = 0$$

$$\therefore [(0,2)]_R = \{(0,y) : y \in \mathbb{N} \setminus \{0\}\}$$

P2 a) P.D.Q: R es una relación de orden.

$\Leftrightarrow R$ es reflexiva, antisimétrica y transitiva

• P.D.Q: R es reflexiva.

$$\Leftrightarrow (x,y) R (x,y) \quad \forall (x,y) \in E_1 \times E_2$$

En efecto:

$$(x,y) R (x,y) \Leftrightarrow [x R_1 x \wedge y R_2 y]$$

ya que R_1 y R_2 son relaciones de orden, son reflexivas y por lo tanto se cumple que $x R_1 x \quad \forall x \in E_1$ y $y R_2 y \quad \forall y \in E_2$.

$\therefore (x,y) R (x,y)$, es decir, R es reflexiva.

• P.D.Q: R es antisimétrica

$$\Leftrightarrow [(x,y) R (w,z) \wedge (w,z) R (x,y)] \Rightarrow (x,y) = (w,z) \quad \forall (x,y), (w,z) \in E_1 \times E_2$$

En efecto:

$$(x,y) R (w,z) \Leftrightarrow [x R_1 w \wedge y R_2 z]$$

$$(w,z) R (x,y) \Leftrightarrow [w R_1 x \wedge z R_2 y]$$

Pero $x R_1 w \wedge w R_1 x \Rightarrow x = w$ (porque R_1 es de orden)

y $y R_2 z \wedge z R_2 y \Rightarrow y = z$ (porque R_2 es de orden).

$$\Rightarrow (x,y) = (w,z)$$

$\therefore [(x,y) R (w,z) \wedge (w,z) R (x,y)] \Rightarrow (x,y) = (w,z)$, es decir, R es antisimétrica.

• P.D.Q: R es transitiva

$$\Leftrightarrow [(x,y)R(w,z) \wedge (w,z)R(u,v)] \Rightarrow (x,y)R(u,v) \quad \forall (x,y),(w,z),(u,v) \in E_1 \times E_2.$$

En efecto:

$$(x,y)R(w,z) \Leftrightarrow [xR_1w \wedge yR_2z]$$

$$(w,z)R(u,v) \Leftrightarrow [wR_1u \wedge zR_2v]$$

Pero $xR_1w \wedge wR_1u \Rightarrow xR_1u$ (pq' R_1 es de orden)

y $yR_2z \wedge zR_2v \Rightarrow yR_2v$ (pq' R_2 es de orden)

$$\Rightarrow (xR_1u \wedge yR_2v) \Leftrightarrow (x,y)R(u,v)$$

$\therefore [(x,y)R(w,z) \wedge (w,z)R(u,v)] \Rightarrow (x,y)R(u,v)$, es decir, R es transitiva.

Ya que R es reflexiva, antisimétrica y transitiva, podemos concluir que R es una relación de orden.

P2 b) PDA R

NO es de orden total

NOTEMOS PRIMERO QUE YO SOLO
SE QUE R_1 Y R_2 SON DE ORDEN
NO SE SI SON TOTALES O NO.

Caso 1: R_1 y R_2

NO totales

$$\Rightarrow \exists x, y \in E_1 \quad \neg (x R_1 y \vee y R_1 x) \\ \exists a, b \in E_2 \quad \neg (a R_2 b \vee b R_2 a)$$

¿Qué pasa con $(x, a) R (y, b)$?

$$(x, a) R (y, b) \Leftrightarrow x R_1 y \wedge a R_2 b$$

PERO NINGUNO,
 ~~$(x, a) R (y, b)$~~ SE CUMPLE!

$$(y, b) R (x, a) \Leftrightarrow y R_1 x \wedge b R_2 a$$

NUEVAMENTE
NINGUNO SE CUMPLE!

ENTONCES ENCONTRE 2 ELEMENTOS
QUE NO SE RELACIONAN, ES
DECIR

R no es de orden total en este caso

CASO 2: R_1 PARCIAL, R_2 TOTAL

Como R_1 PARCIAL $\Rightarrow \exists x, y \in E_1$
 $TA \sim (x R_1 y \vee y R_1 x)$

Luego basta tomar (x, a) y (y, b)

$\Rightarrow (x, a) R (y, b) \wedge (y, b) R (x, a)$
AMBOS NO SE CUMPLEN
POR EL MISMO ARGUMENTO
QUE EN EL CASO 1.

CASO 3: Análogo (R_1 TOTAL, R_2 NO total)

CASO 4: (CAS DIFÍCIL) R_1 y R_2 TOTAL

b) P.D.Q. R no es de orden total

$\Leftrightarrow \exists (x,y), (w,z) \in E_1 \times E_2$ tal que $\sim((x,y)R(w,z) \vee (w,z)R(x,y))$.

Ya que existen al menos 2 elementos distintos en E_1 , podemos tomar $x, w \in E_1$ con $x \neq w$ tal que xR_1w y $\sim(wR_1x)$. Esto porque, ya que R_1 es antisimétrica, si se cumpliera que $xR_1w \wedge wR_1x$, entonces necesariamente $x=w$ y nosotros estamos tomando $x \neq w$.

Bajo el mismo razonamiento, podemos tomar $y, z \in E_2$ tal que $\sim(yR_2z)$ y zR_2y .

Veamos ahora que no se cumple $(x,y)R(w,z)$ ni $(w,z)R(x,y)$.

$$(x,y)R(w,z) \Leftrightarrow xR_1w \wedge yR_2z \Leftrightarrow V \wedge F \Leftrightarrow F$$

$$(w,z)R(x,y) \Leftrightarrow wR_1x \wedge zR_2y \Leftrightarrow F \wedge V \Leftrightarrow F$$

$\therefore \exists (x,y), (w,z) \in E_1 \times E_2$ tal que $\sim((x,y)R(w,z) \vee (w,z)R(x,y))$, es decir, R no es de orden total

Ya que para los 4 casos R no es de orden total, podemos concluir que R no es una relación de orden total.

P3) a) i. P.D.Q: ψ es una relación de orden

• P.D.Q ψ es reflexiva

$$\Leftrightarrow x \psi x \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

En efecto: $x \psi x \Leftrightarrow (x-x) \in \mathbb{N}$

$$x-x = 0 \in \mathbb{N}$$

$$\Rightarrow x \psi x$$

$\therefore \psi$ es reflexiva

• P.D.Q: ψ es antisimétrica

$$\Leftrightarrow [x \psi y \wedge y \psi x] \Rightarrow x=y \quad \forall x, y \in \mathbb{R}$$

En efecto:

$$x \psi y \Leftrightarrow \underbrace{(y-x)}_a \in \mathbb{N} \quad \wedge \quad y \psi x \Leftrightarrow \underbrace{(x-y)}_{-a} \in \mathbb{N}$$

Pero entonces tenemos que a y $-a$ son naturales. La única forma

de que esto pase es $a=0 \Leftrightarrow y-x=0 \Leftrightarrow y=x$

$\therefore \psi$ es antisimétrica.

• P.D.Q: ψ es transitiva

$$\Leftrightarrow (x \psi y \wedge y \psi z) \Rightarrow x \psi z$$

En efecto: $x \psi y \Leftrightarrow (y-x) \in \mathbb{N} \quad \wedge \quad y \psi z \Leftrightarrow (z-y) \in \mathbb{N}$

Si $(y-x) \in \mathbb{N} \quad \wedge \quad (z-y) \in \mathbb{N}$, entonces $(y-x) + (z-y) \in \mathbb{N}$

$$\Leftrightarrow (z-x) \in \mathbb{N} \quad \Leftrightarrow x \psi z$$

$\therefore \psi$ es transitiva.

Ya que ψ es reflexiva, antisimétrica y transitiva, podemos concluir que ψ es una relación de orden.

ii. y

NO es una relación de orden total

ya que no se cumple que $\{x, y\} = [9]$ ^{L5}

$$\forall x, y \in \mathbb{R} \quad xRy \vee yRx$$

Basta tomar $x = 1,2$ $y = 3,1$

$$xRy \Leftrightarrow (y-x) \in \mathbb{N} \quad \text{pero} \quad 3,1 - 1,2 = 1,9 \notin \mathbb{N}$$

$$yRx \Leftrightarrow (x-y) \in \mathbb{N} \quad \text{pero} \quad 1,2 - 3,1 = -1,9 \notin \mathbb{N}$$

b) i. P.D.Q Φ es una relación de equivalencia

• P.D.Q Φ es reflexiva y transitiva

ya que $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Z}$, de (a) i. podemos concluir que Φ es

reflexiva y transitiva.

• P.D.Q Φ es simétrica

$$\Leftrightarrow \forall x, y \in \mathbb{R} \quad xRy \Rightarrow yRx$$

En efecto: $xRy \Leftrightarrow \underbrace{(y-x)}_a \in \mathbb{Z}$

$$\boxed{} a \in \mathbb{Z} \Rightarrow -a \in \mathbb{Z} \quad \Leftrightarrow \quad -(y-x) \in \mathbb{Z} \quad \Leftrightarrow \quad (x-y) \in \mathbb{Z} \quad \Leftrightarrow \quad yRx$$

$\therefore \Phi$ es simétrica.

ya que Φ es reflexiva, simétrica y transitiva, podemos concluir que Φ es una relación de equivalencia.

ii. $[p]_{\Phi} = \{x \in \mathbb{R} : pRx\}$

$$pRx \Leftrightarrow (x-p) \in \mathbb{Z}$$

$$\Leftrightarrow x-p = k \quad \forall k \in \mathbb{Z}$$

$$\Rightarrow x = p+k \quad \text{però come } p, k \in \mathbb{Z}$$

$$\Rightarrow x \in \mathbb{Z}$$

$$\therefore [p]_{\Phi} = \{x \in \mathbb{Z}\}$$

(iii) P.D.Q $\mathbb{R}/\mathbb{Z} = \{[x]_{\mathbb{Z}} : x \in [0, 1)\}$

Para demostrar esto, tomaremos $a \in \mathbb{R}$ arbitrario y
demostraremos que $[a]_{\mathbb{Z}} = [x]_{\mathbb{Z}} \quad x \in [0, 1)$.

Sea $a \in \mathbb{R} \quad [a]_{\mathbb{Z}} = \{m \in \mathbb{Z} : a \notin m\}$

En efecto: $a \notin m \Leftrightarrow m - a \in \mathbb{Z}$.

función parte
entera

Pero podemos escribir a como $(a - [a]) + [a]$,

entonces $m - a = m - [(a - [a]) + [a]]$

$$= m - (a - [a]) - [a]$$

entonces nosotros queremos que:

$$m - (a - [a]) - [a] \in \mathbb{Z}$$

Pero sabemos que $[a] \in \mathbb{Z}$, por lo que solo falta

ver que $m - (a - [a]) \in \mathbb{Z}$.

Pero también sabemos que $(a - [a]) \in [0, 1) \quad \forall a \in \mathbb{R}$.

Sea $b = a - [a]$ con $b \in [0, 1)$

Tenemos entonces que $m - b \in \mathbb{Z} \Rightarrow m - a \in \mathbb{Z}$.

Por lo tanto, los "m" que se relacionan con "a" son

los mismos que se relacionan con algún $b \in [0, 1)$.

y por lo tanto $[a]_{\mathbb{Z}} = [x]_{\mathbb{Z}} \quad \text{con } x \in [0, 1) \quad \forall a \in \mathbb{R}$

$$\therefore \mathbb{R}/\mathbb{Z} = \{[x]_{\mathbb{Z}} : x \in [0, 1)\}$$

P4/a) P.D.Q: R_k es reflexiva y transitiva

• P.D.Q: R_k es reflexiva

$$\Leftrightarrow AR_kA \quad \forall A \in P(E)$$

En efecto: $AR_kA \Leftrightarrow A \cap K \subseteq A$

$$A \cap K \subseteq A \quad \forall K \in P(E)$$

$\therefore R_k$ es reflexiva

• P.D.Q: R_k es transitiva

$$\Leftrightarrow [AR_kB \wedge BR_kC] \Rightarrow AR_kC \quad \forall A, B, C \in P(E)$$

En efecto:

$$AR_kB \Leftrightarrow B \cap K \subseteq A \quad \wedge \quad BR_kC \Leftrightarrow C \cap K \subseteq B$$

Ahora $C \cap K \subseteq B \Rightarrow C \cap K \subseteq B \cap K \subseteq A \Rightarrow C \cap K \subseteq A \Leftrightarrow AR_kC$

$\therefore R_k$ es transitiva $\forall A, B, C \in P(E)$.

b) Para que R_K sea una relación de orden, solo falta ver que es antisimétrica. $\square$

$$\Rightarrow [A R_K B \wedge B R_K A] \Rightarrow A = B$$

$$\Leftrightarrow [B \cap K \subseteq A \wedge A \cap K \subseteq B] \Rightarrow A = B$$

Podemos tomar $\boxed{K = U}$ (universo)

$$\text{con lo que } \left. \begin{array}{l} B \cap U \subseteq A \Rightarrow B \subseteq A \\ A \cap U \subseteq B \Rightarrow A \subseteq B \end{array} \right\} \Rightarrow A = B$$