

MA1101-7 Introducción al Álgebra

Profesor: José Soto San Martín.

Auxiliar: Ilana Mergudich Thal.

Fecha: Miércoles 13 de Abril.



## Auxiliar 5: Relaciones

**Resumen:** Sea  $\mathcal{R}$  una relación en  $A$ , entonces

- $\mathcal{R}$  es **refleja** ssi  $(\forall x \in A) x\mathcal{R}x$ .
- $\mathcal{R}$  es **simétrica** ssi  $(\forall x, y \in A) x\mathcal{R}y \Rightarrow y\mathcal{R}x$ .
- $\mathcal{R}$  es **antisimétrica** ssi  $(\forall x, y \in A) (x\mathcal{R}y \wedge y\mathcal{R}x) \Rightarrow x = y$ .
- $\mathcal{R}$  es **transitiva** ssi  $(\forall x, y, z \in A) (x\mathcal{R}y \wedge y\mathcal{R}z) \Rightarrow x\mathcal{R}z$ .
- $\mathcal{R}$  es relación de **orden** ssi es refleja, antisimétrica y transitiva.
- $\mathcal{R}$  es relación de **equivalencia** ssi es refleja, simétrica y transitiva.
- Si  $\mathcal{R}$  es una relación de orden, diremos que es un **orden total** si para cada  $x, y \in A$   $(x\mathcal{R}y \vee y\mathcal{R}x)$ . De lo contrario, se dirá que es un **orden parcial**.
- Si  $\mathcal{R}$  es de equivalencia y  $x \in A$   $[x]_{\mathcal{R}} = \{y \in A \mid x\mathcal{R}y\}$  es la **clase de equivalencia** de  $x$  asociada a  $\mathcal{R}$ .
- $A/\mathcal{R}$  es el conjunto de las clases de equivalencia inducidas por  $\mathcal{R}$  y se le llama **conjunto cociente**.

**P1.** Sea  $\mathcal{R}$  una relación definida de  $\mathbb{Z} \times (\mathbb{N} \setminus \{0\})$  por  $(a, b)\mathcal{R}(c, d) \Leftrightarrow ad = bc$ . Demuestre que  $\mathcal{R}$  es una relación de equivalencia y determine  $[(0, 2)]_{\mathcal{R}}$ , es decir, la clase de equivalencia de  $(0, 2) \in \mathbb{Z} \times (\mathbb{N} \setminus \{0\})$ .

**P2.** Sean  $E_1, E_2$  dos conjuntos no vacíos y  $\mathcal{R}_1, \mathcal{R}_2$  relaciones de orden definidas en  $E_1$  y  $E_2$  respectivamente.

- Demuestre que  $\mathcal{R}$  definida en  $E_1 \times E_2$  por  $(x, y)\mathcal{R}(u, v) \Leftrightarrow [x\mathcal{R}_1 u \wedge y\mathcal{R}_2 v]$  es una relación de orden en  $E_1 \times E_2$ .
- Si tanto  $E_1$  como  $E_2$  tienen al menos dos elementos cada uno, pruebe que  $\mathcal{R}$  no es una relación de orden total.

**P3.** (a) Se define en  $\mathbb{R}$  la relación  $\Psi$  dada por:  $x\Psi y \Leftrightarrow (y - x) \in \mathbb{N}$ .

- Demuestre que  $\Psi$  es una relación de orden.
- Indique si es o no una relación de orden total. Justifique.

(b) Considere ahora la relación  $\Phi$  definida en  $\mathbb{R}$  como  $x\Phi y \Leftrightarrow (y - x) \in \mathbb{Z}$ .

- Demuestre que  $\Phi$  es una relación de equivalencia.
- Dado  $p \in \mathbb{Z}$ , calcule la clase de equivalencia  $[p]_{\Phi}$ .
- Demuestre que el conjunto cociente de  $\Phi$  es  $\{[x]_{\Phi} \mid x \in [0, 1)\}$ .

**P4.** Sea  $E$  un conjunto no vacío y considere  $K \in \mathcal{P}(E)$  fijo, con  $K \neq \emptyset$ . Se define en  $\mathcal{P}(E)$  la relación  $\mathcal{R}_K$  por

$$A\mathcal{R}_K B \Leftrightarrow B \cap K \subseteq A.$$

- Pruebe que  $\mathcal{R}_K$  es refleja y transitiva.
- Proponga un conjunto  $K \in \mathcal{P}(E)$  de modo que  $\mathcal{R}_K$  sea una relación de orden. Justifique.