

PAUTA "AMIGABLE" CONTROL 2

P1] Recordemos que existen las siguientes propiedades:

$$f \circ g \text{ inyectiva} \Rightarrow g \text{ inyectiva} \quad (*)$$

$$f \circ g \text{ sobreyectiva} \Rightarrow f \text{ sobreyectiva} \quad (**)$$

a) 1) P.D.Q. f es Biyectiva

Entonces tenemos que demostrar que f es inyectiva y sobreyectiva

Sabemos que $g \circ f = Id_A$ y además sabemos que la identidad es siempre biyectiva, y por lo tanto, es (en particular) inyectiva

$$\therefore g \circ f \text{ es inyectiva (porque es } = Id_A)$$

$$\Rightarrow f \text{ inyectiva (por } (*)).$$

También sabemos que $f \circ h = Id_B$. Usando el mismo razonamiento tenemos que Id_B es en particular sobreyectiva.

$$\therefore f \circ h \text{ es sobreyectiva (porque es } = Id_B)$$

$$\Rightarrow f \text{ sobreyectiva (por } (**)).$$

Ya que f es inyectiva y sobreyectiva, podemos concluir que f es biyectiva.

2) Como ya demostramos que f es biyectiva, podemos decir que existe f^{-1} (la inversa de f)

$$\text{P.D.Q } f^{-1} = g = h$$

Sabemos que $g \circ f = \text{Id}_A$ / $\circ f^{-1}$ (componemos con f^{-1} por la derecha a ambos lados)

$$\Rightarrow g \circ \underbrace{f \circ f^{-1}} = \text{Id}_A \circ f^{-1}$$

$$\Rightarrow g \circ \text{Id}_B = \text{Id}_A \circ f^{-1}$$

$$\Rightarrow g = f^{-1}$$

* Notemos que podemos componer con f^{-1} por la derecha a ambos lados ya que $f^{-1}: B \rightarrow A$ y $\text{Id}_A: A \rightarrow A$ y $f: A \rightarrow B$.

(* lo que sale de f^{-1} puede entrar a Id_A y a f)

También sabemos que $f \circ h = \text{Id}_B$ / $\circ f^{-1}$ (componemos con f^{-1} por la izquierda a ambos lados)

$$\Rightarrow \underbrace{f^{-1} \circ f} \circ h = f^{-1} \circ \text{Id}_B$$

$$\Rightarrow \text{Id}_A \circ h = f^{-1} \circ \text{Id}_B$$

$$\Rightarrow h = f^{-1}$$

* Notemos que podemos componer con f^{-1} por la izquierda a ambos lados ya que $f^{-1}: B \rightarrow A$, $f: A \rightarrow B$ y $\text{Id}_B: B \rightarrow B$.

(* lo que sale de f y de Id_B puede entrar a f^{-1})

$$\therefore g = f^{-1} = h$$

3) P.D.Q $[\forall X \subseteq E, \mathcal{Q}(X) = X] \Rightarrow \mathcal{Q} = \text{Id}_E$

$\Rightarrow$ Usaremos como hipótesis que $\forall X \subseteq E, \mathcal{Q}(X) = X$ y demostraremos que $\mathcal{Q} = \text{Id}_E$.

"Para todo conjunto X ,
subconjunto de E , la
imagen de X es X ."

Tenemos que $\forall X \subseteq E \quad \mathcal{Q}(X) = X$

ya que esto se cumple para todos los subconjuntos de E , se cumple
en particular para $\{x_0\}$ con $x_0 \in E$ (existe al menos alguien en E ya que $E \neq \emptyset$)
es decir $\mathcal{Q}(\{x_0\}) = \{x_0\}$, con lo que necesariamente $\mathcal{Q}(x_0) = x_0$.

Podemos hacer lo mismo con todos los elementos del conjunto y así

podremos concluir que $\forall x \in E \quad f(x) = x$ ya que $\forall x \in E \quad f(\{x\}) = \{x\}$.

Sabemos además que $\mathcal{Q}: E \rightarrow E$

$$\begin{aligned} \therefore \mathcal{Q}: E &\rightarrow E \\ x &\mapsto f(x) = x \end{aligned} = \text{Id}_B$$

$$\therefore [\forall X \subseteq E, \mathcal{Q}(X) = X] \Rightarrow \mathcal{Q} = \text{Id}_B$$

$$\therefore [\forall X \subseteq E, \mathcal{Q}(X) = X] \Rightarrow \mathcal{Q} = \text{Id}_E$$

$\Leftarrow$ Hipótesis: $\mathcal{Q} = \text{Id}_E$, P.D.Q $\forall X \subseteq E \quad \mathcal{Q}(X) = X$

$$\mathcal{Q}(X) = \{y \in E \mid \exists x \in X \mid f(x) = y\} \quad (\text{por definición de conjunto imagen})$$

Pero como $f(x) = x$ (definición de identidad)

$$\mathcal{Q}(X) = \{x \in E \mid \exists x \in X \mid f(x) = x\}$$

Es decir, "todos los x en E tal que existe algún x en X tal que $f(x) = x$ ". Pero para todos los x en E existe algún x en X (si mismo) que cumple eso.

Por lo tanto, todos los x están en la imagen. Además, todos los x están en X , con lo que la imagen queda:

$$\mathcal{Q}(X) = \{x \in X\} = X \quad (\text{"La imagen es el conjunto de todos los } x \text{ en } X, \text{ es decir, todo } X")$$

$$\therefore Q = Id_E \Rightarrow [\forall x \in E, Q(x) = x]$$

ya que demostramos ambas implicancias, queda demostrado que

$$[\forall x \in E, Q(x) = x] \Leftrightarrow [Q = Id_E]$$

P21 a) P.D.Q $f \circ g = Id_A$

En efecto: $f \circ g = f(g(x))$

$$= f(x, x) \quad (\text{porque } g(x) = (x, x))$$

$$= x \quad (\text{porque } f(x, x) = x)$$

$$\therefore f \circ g = x$$

Además, los elementos que "entran" a $f \circ g$, son los que "entran" a g .

Por lo tanto, el conjunto de partida de $f \circ g$ es A (porque $g: A \rightarrow A \times A$)

los elementos que "salen" de $f \circ g$, son los que "salen" de f . Por lo tanto,

el conjunto de llegada de $f \circ g$ también es A (porque $f: A \times A \rightarrow A$).

$$\therefore f \circ g: A \rightarrow A$$

$$x \mapsto (f \circ g)(x) = x = Id_A$$

b) tenemos que ver si f y g son Biyectivas.

Partamos por f . veamos primero si es Inyectiva.

¿Existirán dos Pares (x, y) (w, z) distintos tal que $f(x, y) = f(w, z)$?

¡Claro que sí! Porque A tiene al menos dos elementos.

entonces $\exists y_1, y_2 \in A$ $y_1 \neq y_2$.

si tomamos $f(x, y_1) = x$ y $f(x, y_2) = x$ también.

pero $(x, y_1) \neq (x, y_2)$,

$\therefore f$ NO es Inyectiva.

veamos ahora si es sobreyectiva. ¿será posible que para todo x en A exista un par (w, z) tal que $f(w, z) = x$? ¡Por supuesto que sí! ya que $(w, z) \in A \times A$. entonces demostraremos que f es sobreyectiva.

P.D.Q $\forall x \in A \quad \exists (w, z) \in A \times A$ tal que $f(w, z) = x$

veamos, ¿qué es w que hace la función f ? toma a la primera

componente del par ordenado. entonces si queremos que

$f(w, z) = x$, necesitamos que $w = x$.

Entonces Basta tomar $w = x$ (que pertenece a A) y z cualquiera en A

y se cumple que $(w, z) \in A \times A$ y $f(w, z) = f(x, z) = x$.

$\therefore f$ es sobreyectiva.

ya que f no es inyectiva, NO puede ser Biyectiva.

Veamos que pasa con g

Veamos primero si es inyectiva
¿Será posible que si tomamos
 x_1, x_2 con $x_1 \neq x_2$, $g(x_1) = g(x_2)$?
es decir, $g(x_1) = (x_1, x_1) = (x_2, x_2) = g(x_2)$
con $(x_1) \neq (x_2)$

$$g(x_1) = g(x_2)$$

$$\Leftrightarrow (x_1, x_1) = (x_2, x_2) \quad (\text{Def de igualdad en pares ordenados})$$
$$\Rightarrow x_1 = x_2 \wedge x_1 = x_2$$

$$\Leftrightarrow \boxed{x_1 = x_2}$$

$\therefore g$ es inyectiva.

Veamos ahora la sobreyectividad
¿Será posible que para todo
 $(x, x) \in A \times A$ exista un w en A
tal que $g(w) = (x, x)$?

Si te fijas g obliga a que
en la coordenada x y en la coordenada
 y esté el mismo valor
PERO EN A HAY ALMENOS DOS
ELEMENTOS! ES DECIR HAY $x_1 \neq y_1$
¿Cuál sería la preimagen de (x_1, y_1) ?
NADIE! $\therefore g$ no es sobreyectiva

YA QUE NO ES SOBREYECTIVA, NO
PUEDE SER BIYECTIVA.

$$c) g \circ f = g(f(x,y)) = g(x) = (x,x)$$

$\uparrow$ $\uparrow$
 Porque $f(x,y) = x$ Porque $g(x) = (x,x)$

claramente $g \circ f$ NO es $\text{Id}_{A \times A}$, ya que toma un par (x,y) y devuelve (x,x) .