

PAUTA Aux C2

P1] forma 1] f biyectiva $\Leftrightarrow f$ sob e iny.

PDQ: f sob, sea $y \in P(U)$

$\exists x \in P(U)$ t.q. $f(x) = x^c = y$?

se les ocurre alguien que al tomarle
complemento de y ... mmm... sí! $\boxed{x = y^c}$

OJO! este es nuestro postulante, hay
que revisar que cumpla

Es claro que $y^c \in P(U)$

$$f(y^c) = (y^c)^c = y //$$

$\Rightarrow f$ sobreyectiva.

PDQ/ f inyectiva.

$$\boxed{f(x) = f(y)} \Leftrightarrow x^c = y^c / ()^c$$

$$\Leftrightarrow (x^c)^c = (y^c)^c$$

$$\Leftrightarrow \boxed{x = y}$$

∴ f inyectiva

$\Rightarrow$ Sob + iny. $\Leftrightarrow$ biyectiva.

!!

forma 2

f biyectiva $\Leftrightarrow \exists f^{-1} \text{ t.q. } f^{-1}(f(x)) = x$

es decir queremos $f^{-1} \text{ t.q.}$

$$f^{-1}(x^c) = x$$

¿Se les ocurre alguien?

Si tomando $f^{-1}: \mathcal{P}(U) \rightarrow \mathcal{P}(U)$

$$x \rightarrow f^{-1}(x) = x^c$$

es decir $f^{-1} = f$ (caso muy particular)

$$f^{-1}(f(x)) = f^{-1}(x^c) = (x^c)^c = x$$

$$\circ \circ \exists f^{-1}$$

$\circ \circ f$ biyectiva.

P2] h o g o f iny; f o h o g iny; g o f o h sob

$$\Rightarrow \boxed{f \text{ iny.}}_{f \circ (1)}$$

$$\Rightarrow \boxed{g \text{ iny}} \Rightarrow \boxed{g \text{ sob.}}$$

$$g \text{ biy} \Leftrightarrow \exists g^{-1} !$$

y ahora que sabemos que $\exists g^{-1}$

$$g^{-1} \circ (g \circ f \circ h) = (g^{-1} \circ g) \circ f \circ h$$

$= Id_B \circ f \circ h = f \circ h$ que es
la composición de g^{-1} con $g \circ f \circ h$

ambas sobreyectivas

$\Rightarrow f \circ h$ es sobreyectiva

$\Rightarrow \boxed{f \text{ es sobreyectiva}}$

esto + (1) $\Rightarrow f$ biyectiva $\Rightarrow \exists f^{-1}$

$$f^{-1} \circ (f \circ h) = (f^{-1} \circ f) \circ h$$

$= \text{Id}_A \circ h = h$ que por ser una comp. de sobreyectivas es

sobreyectiva $\Rightarrow \boxed{h \text{ es sobreyectiva.}}$

con un argumento similar

$$(h \circ g \circ f) \circ (f^{-1} \circ g^{-1})$$

$$= h \circ g \circ f \circ f^{-1} \circ g^{-1}$$

$$= h \circ g \circ \text{Id}_B \circ g^{-1}$$

$$= h \circ g \circ g^{-1}$$

$$= h \circ \text{Id}_C$$

$$= h$$

$\Rightarrow \boxed{h \text{ inyectiva}}$

$\Rightarrow h$ biyectiva //

$$P3/a) \Psi(f, g) = (f \circ g)^{-1}$$

que es una composición de biyectivas de $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ (pues $f, g \in \mathcal{F}$)

$\Rightarrow (f \circ g)^{-1}$ es biyectiva de $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$\Rightarrow \Psi(f, g) \in \mathcal{F}$

b) Sea $h \in \mathcal{F} \Rightarrow h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ biyectiva

¿Existen dos funciones biyectivas de $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ que al componerlas y luego sacarle inversa den h ?

Bueno h biyectiva $\Leftrightarrow \exists h^{-1}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$
mmm... si yo compusiese h^{-1} con algo biyectivo de $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ que no le haga nada al sacarle inversa daría h

$$\begin{aligned} \text{¿ } Id_{\mathbb{R}}! &\rightarrow \Psi(h^{-1}, Id_{\mathbb{R}}) \\ &= (h^{-1} \circ Id_{\mathbb{R}})^{-1} \\ &= (h^{-1})^{-1} \\ &= h // \end{aligned}$$

$\Rightarrow \Psi$ sobreyectiva //

obs: demostrar que $(f \circ g)^{-1}$

es no iny. es lo mismo que $f \circ g$ no iny pues la inversa es única.

Tomando $h = 2x + 1$

¿Se te ocurren dos formas distintas de componer h ?

si forma 1 $f = 2x + 1$; $g = x$

(Que es la misma construcción usada recién)

forma 2 $\tilde{f} = x + 1$ $\tilde{g} = 2x$

así $(f \circ g)(x)$; $(\tilde{f} \circ \tilde{g})(x)$

$$= f(x) \quad ; \quad = \tilde{f}(2x)$$

$$= 2x + 1 \quad = 2x + 1$$

$$\therefore (f, g) \neq (\tilde{f}, \tilde{g}) \not\Rightarrow \psi(f, g) \neq \psi(\tilde{f}, \tilde{g})$$

$\therefore$ No inyectiva.

d) primero de terminemos explícitamente

$$A \times A = \{(f, f), (f, g), (g, f), (g, g)\}$$

$$\begin{aligned} \psi(f, f) &= (f(2x+3))^{-1} = (2(2x+3) + 3)^{-1} \\ &= (4x + 6 + 3)^{-1} = (4x + 9)^{-1} = h^{-1} \end{aligned}$$

Para sacar la inversa.

$$h \circ h^{-1}(x) = x$$

$$h(h^{-1}(x)) = 4h^{-1}(x) + 9 = x$$

$$\Rightarrow \boxed{h^{-1}(x) = \frac{x-9}{4}} //$$

$$\psi(f, g) = \left(f\left(\frac{x}{2}\right)\right)^{-1} = \left(2\left(\frac{x}{2}\right) + 3\right)^{-1} = (x+3)^{-1}$$

$$= x-3 //$$

$$\psi(g, f) = \left(g(2x+3)\right)^{-1} = \left(\frac{2x+3}{2}\right)^{-1} = x - \frac{3}{2} //$$

$$\psi(g, g) = g\left(\frac{x}{2}\right)^{-1} = \left(\frac{\frac{x}{2}}{2}\right)^{-1} = \left(\frac{x}{4}\right)^{-1} = 4x //$$

P4 P. d. Q $(\forall D \subseteq B) \quad g^{-1}(D) = C \cap f^{-1}(D)$

Demostremos la doble inclusión.

$\subseteq$ P. d. Q $g^{-1}(D) \subseteq C \cap f^{-1}(D)$

$$\text{sea } x_0 \in g^{-1}(D)$$

$$\Leftrightarrow x_0 \in C \wedge g(x_0) \in D$$

$$\text{como } x_0 \in C, \quad g(x_0) = f(x_0)$$

$$\Rightarrow x_0 \in C \wedge f(x_0) \in D$$

$$\Leftrightarrow x_0 \in C \cap f^{-1}(D)$$

$$\therefore g^{-1}(D) \subseteq C \cap f^{-1}(D)$$

3 P.D.Q $C \cap f^{-1}(D) \subseteq g^{-1}(D)$

Sea $\bar{x} \in C \cap f^{-1}(D)$

$\Rightarrow \bar{x} \in C \wedge \bar{x} \in f^{-1}(D)$

$\Rightarrow \bar{x} \in C \wedge f(\bar{x}) \in D$

Pero como $\bar{x} \in C$, $f(\bar{x}) = g(\bar{x})$

$\Rightarrow \bar{x} \in C \wedge g(\bar{x}) \in D$

$\Rightarrow \bar{x} \in g^{-1}(D)$

$\therefore C \cap f^{-1}(D) \subseteq g^{-1}(D)$

ya que demostramos ambas inclusiones, podemos concluir que

$(\forall D \subseteq B) \quad g^{-1}(D) = C \cap f^{-1}(D)$

(estrictamente creciente = $\nearrow$)

a) PDQ: $x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$

si $x_1 \neq x_2$, $x_1 < x_2$ o $x_2 < x_1$

caso 1 | $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$ (pues $f \nearrow$)

y como $f(x_1) < f(x_2) \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$

el otro caso es análogo

$\therefore f \nearrow \Rightarrow f$ inyectiva.

b) No basta tomar $f(x) = 2x$

$$x_1 < x_2 \Rightarrow 2x_1 < 2x_2 = f(x_1) < f(x_2)$$

$\therefore f$ es $\nearrow$ pero $f^{-1}(139)$

ALGÚN NATURAL TAQ $f(x) = 2x = 3$

NO $\therefore f$ no sobreyectiva.

c) Notemos que como $f \nearrow$ y sobreyectiva $f(0) = 0$ pues si no fuese 0

y fuese 8 (por dar un ejemplo)

como f es creciente todas las otras imágenes deben ser mayores a 8

y $\{0, 1, \dots, 7\}$ NO TENDRÍA PREIMÁGEN

$\Rightarrow f$ no sobreyectiva.

de la misma forma $f(1) = 1, f(2) = 2 \dots$ etc
es decir f debe ser la identidad //