

PAUTA AUXILIAR 4

P1 a) P.D.Q $(\forall A, B \subseteq E) f(A) \setminus f(B) \subseteq f(A \setminus B)$

Sea $y \in f(A) \setminus f(B)$ con $A, B \subseteq E$ arbitrarios

$$\Leftrightarrow y \in f(A) \wedge y \notin f(B)$$

$$\Leftrightarrow \exists x_0 \in A : f(x_0) = y \wedge \nexists x_1 \in B : f(x_1) = y$$

$$\Leftrightarrow \exists x_0 \in A : f(x_0) = y \wedge \forall x_1 \in B : f(x_1) \neq y$$

$$\Rightarrow x_0 \in A \wedge x_0 \notin B \quad (\text{porque si } x_0 \in B \text{ entonces } f(x_0) \neq y)$$

$$\Leftrightarrow x_0 \in A \setminus B$$

$$\Rightarrow \exists x_0 \in A \setminus B : f(x_0) = y$$

$$\Rightarrow y \in f(A \setminus B)$$

b) como ya demostramos que $(\forall A, B \subseteq E) f(A) \setminus f(B) \subseteq f(A \setminus B)$,

solo tenemos que demostrar que

$$[(\forall A, B \subseteq E) f(A \setminus B) \subseteq f(A) \setminus f(B)] \Leftrightarrow f \text{ es inyectiva}$$

$\Leftarrow$ Hipótesis: f inyectiva. P.D.Q $(\forall A, B \subseteq E) f(A \setminus B) \subseteq f(A) \setminus f(B)$.

Sea $y \in f(A \setminus B)$.

$$\Rightarrow \exists x_0 \in A \setminus B : f(x_0) = y$$

$$\Rightarrow \exists x_0 \in A : f(x_0) = y \quad (A \setminus B \subseteq A)$$

$$\langle \Rightarrow \rangle y \in f(A) \quad \star$$

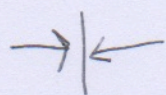
Ahora solo falta ver que $y \notin f(B)$.

Por contradicción, digamos que $y \in f(B)$

$$\langle \Rightarrow \rangle \exists x_1 \in B : f(x_1) = y$$

$$\Rightarrow f(x_1) = f(x_0) = y$$

$$\Rightarrow x_1 = x_0 \quad (\text{porque } f \text{ es inyectiva})$$



porque $x_1 \in B$ y $\underbrace{x_0 \in A \setminus B!}_{\Rightarrow x_0 \notin B}$

$$\therefore y \notin f(B)$$

Ahora, si volvemos atrás, Por $\star$ teníamos que $y \in f(A)$

Entonces $y \in f(A) \wedge y \notin f(B)$

$$\langle \Rightarrow \rangle y \in f(A) \setminus f(B)$$

$$\therefore f \text{ inyectiva} \Rightarrow (\forall A, B \subseteq E) f(A \setminus B) \subseteq f(A) \setminus f(B).$$

$\Rightarrow$ Hipótesis: $f(A) \setminus f(B) \subseteq f(A \setminus B) \quad \forall A, B \subseteq E$.

P.D.Q: f es inyectiva $\Leftrightarrow (\forall x_1, x_2 \in E) f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$
 $\Leftrightarrow (\forall x_1, x_2) x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$

Sea $A = \{x_1\}$, $B = \{x_2\}$ $x_1 \neq x_2$.

En efecto: $f(A) \setminus f(B) = f(\{x_1\}) \setminus f(\{x_2\}) \stackrel{\text{por hipótesis}}{=} f(\{x_1\} \setminus \{x_2\})$

Pero como $x_2 \neq x_1$, $\{x_1\} \setminus \{x_2\} = \{x_1\}$

$$\Rightarrow f(\{x_1\}) \setminus f(\{x_2\}) = f(\{x_1\})$$

$$\Rightarrow f(\{x_1\}) \cap f(\{x_2\}) = \emptyset$$

$$\Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$$

$\therefore f(A) \setminus f(B) \subseteq f(A \setminus B) \quad \forall A, B \subseteq E \Rightarrow f$ es inyectiva

ya que demostramos la parte (a) y ambas implicancias, podemos concluir que

$(\forall A, B \subseteq E)$

$$f(A) \setminus f(B) = f(A \setminus B) \Leftrightarrow f \text{ es inyectiva}$$

c) P.D.Q $(\forall Y \subseteq F) f(f^{-1}(Y)) \subseteq Y$

Sea $y \in f(f^{-1}(Y))$

$\Leftrightarrow \exists x_0 \in f^{-1}(Y) : f(x_0) = y$

$\Leftrightarrow \exists w \in Y : f(x_0) = w : f(x_0) = y$

$\Rightarrow w = y$

$\Rightarrow y \in Y$

d) como ya demostramos que $f(f^{-1}(Y)) \subseteq Y \quad \forall Y \subseteq F$,
solo tenemos que demostrar que:

$[(\forall Y \subseteq F) Y \subseteq f(f^{-1}(Y))] \Leftrightarrow f \text{ es sobreyectiva}$

$\Leftarrow$ P.D.Q $(\forall Y \subseteq F) Y \subseteq f(f^{-1}(Y))$

Sea $y \in Y$, ya que f es sobreyectiva, $(\forall y \in F)(\exists x \in E) f(x) = y$

$\Rightarrow \exists x_0 \in f^{-1}(Y) \text{ tal que } f(x_0) = y$

$\Rightarrow f(x_0) \in f(f^{-1}(Y))$

$\Leftrightarrow y \in f(f^{-1}(Y))$

$\therefore f \text{ sobreyectiva} \Rightarrow [(\forall Y \subseteq F) Y \subseteq f(f^{-1}(Y))]$

$\Rightarrow$ 1 P.D.Q f es sobreyectiva

$$\Leftrightarrow (\forall y \in F)(\exists x \in E) \text{ tal que } f(x) = y$$

$$\Leftrightarrow f(E) = F$$

ya que $(\forall Y \subseteq F) f(f^{-1}(Y)) = Y$, en particular

$$f(f^{-1}(F)) = F$$

$\Rightarrow$

$$f(E) = F$$

(porque ya que f es función la preimagen del conjunto de llegada es todo el conjunto de partida)

$$\Leftrightarrow f \text{ es sobreyectiva}$$

$$\therefore [(\forall Y \subseteq F) f(f^{-1}(Y)) = Y] \Rightarrow f \text{ es sobreyectiva}$$

ya que demostramos (c) y ambas implicancias, podemos concluir que

$$[(\forall Y \subseteq F) Y = f(f^{-1}(Y))] \Leftrightarrow f \text{ es sobreyectiva}$$

e) P.D.Q $(\forall Y \subseteq F) f^{-1}(Y^c) = (f^{-1}(Y))^c$

Sea $x_0 \in (f^{-1}(Y))^c$

$$\Leftrightarrow x_0 \in \{x \in E : f(x) \notin Y\}^c$$

$$\Leftrightarrow x_0 \in \{x \in E : f(x) \in Y\}$$

$$\Leftrightarrow x_0 \in \{x \in E : f(x) \in Y^c\}$$

$$\Leftrightarrow x_0 \in f^{-1}(Y^c)$$

$$\therefore (\forall Y \subseteq F) f^{-1}(Y^c) = (f^{-1}(Y))^c$$

P2

$$a) f(0+0) = f(0) + f(0) = f(0) \\ \Rightarrow f(0) = 0 //$$

$$b) 0 = f(0) = f(m+(-m)) = f(m) + f(-m) \\ \Rightarrow f(-m) = -f(m) //$$

c) $\Rightarrow$ ya sabemos que $f(0) = 0$
 y si f es inyectiva es directo
 que $f^{-1}(\{0\}) = \{0\}$

$$\subseteq f(x) = f(y)$$

$$\Rightarrow f(x) - f(y) = 0$$

$$\Rightarrow f(x) + f(-y) = 0 \quad (\text{por b)})$$

$$\Rightarrow f(x-y) = 0 \quad (\text{por hip)})$$

$$\Rightarrow x-y = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{x=y} \circ \circ f \text{ iny.} //$$

$$\circ \circ f \text{ iny} \Leftrightarrow f^{-1}(\{0\}) = \{0\} //$$

P3] a) P.D. Q

$$F^{-1}(\{U, \emptyset\}) = \{(U, \emptyset)\} \cup \{(X, Y) \mid X \subseteq Y\}$$

Estudiamos por separado $F^{-1}(U)$ y $F^{-1}(\emptyset)$.

$F^{-1}(U)$

Necesitamos un par (X, Y) tal que $X \setminus Y = U$.

La única forma de que esto ocurra es que $X = U$ y

Y no le quite nada, es decir, $Y = \emptyset$

$$\therefore F^{-1}(U) = \{(U, \emptyset)\}$$

$F^{-1}(\emptyset)$

Necesitamos un par (X, Y) tal que $X \setminus Y = \emptyset$, es decir, que Y le quite todo a X . Para que esto ocurra, Y puede ser

igual o "más grande" que X , o sea $X \subseteq Y$.

$$\therefore F^{-1}(\emptyset) = \{(X, Y) \mid X \subseteq Y\}$$

Entonces podemos concluir que $F^{-1}(\{U, \emptyset\}) = \{(U, \emptyset)\} \cup \{(X, Y) \mid X \subseteq Y\}$.

b) $D = \{ (X, X) \mid X \in P(U) \}$

$$F(X, X) = X \setminus X = \emptyset \quad \forall X \in P(U)$$

$$\therefore F(D) = \{ \emptyset \}$$

c) P.D.Q $(\forall A \in P(U)) (\exists (X, Y) \in P(U) \times P(U))$ tal que $F(X, Y) = A$

Basta tomar $X = A \in P(U)$ y $Y = \emptyset \in P(U)$ y

entonces $(X, Y) = (A, \emptyset) \in P(U) \times P(U)$ de donde

$$F(A, \emptyset) = A \setminus \emptyset = A \quad \forall A \in P(U).$$

$\therefore F$ es sobreyectiva.

d) Para ver si la función es Biyectiva, solo falta ver si es inyectiva. Esta función No es inyectiva, lo demostraremos con un contraejemplo:

Sea $X = \{1, 2, 3\}$, $Y = \{4, 5\}$ y $Z = \{6, 7\}$.

$$\begin{array}{l|l} F(X, Y) = X \setminus Y = X & \text{tenemos que } F(X, Y) = F(X, Z) \text{ pero} \\ F(X, Z) = X \setminus Z = X & (X, Y) \neq (X, Z). \end{array}$$

$\therefore F$ no es inyectiva $\Rightarrow F$ no es Biyectiva.

P4 P.D.Q. G inyectiva $\Leftrightarrow f$ sobreyectiva

$\Leftarrow$ Hipótesis: f sobreyectiva

P.D.Q. : G es inyectiva

$$\Leftrightarrow (\forall X, Y \in P(B)) \quad G(X) = G(Y) \Rightarrow X = Y$$

Sea $G(X) = G(Y)$

$$\Rightarrow f^{-1}(X) = f^{-1}(Y)$$

$$\Rightarrow f(f^{-1}(X)) = f(f^{-1}(Y))$$

$$\Rightarrow X = Y \quad (\text{pq } f \text{ es sobreyectiva})$$

* recordemos la p1d)

de donde $f(f^{-1}(Y)) = Y$ si f es sobreyectiva

$$\therefore f \text{ sobre} \Rightarrow G \text{ iny.}$$

$\Rightarrow$ Hipótesis: G inyectiva

P.D.Q. f es sobreyectiva

$$\Leftrightarrow (\forall y \in B) (\exists x \in A) \text{ tal que } f(x) = y$$

Como G es inyectiva, para todo y en B , $F(\{y\}) = f^{-1}(\{y\})$, distinto de vacío.

Entonces, para todo y en B , existe un x en $f^{-1}(\{y\})$ tal que $y = f(x)$.

Por lo tanto, f es sobreyectiva.

Ya que están demostradas ambas implicancias, se concluye que

G inyectiva $\Leftrightarrow f$ sobreyectiva