

MA1101-7 Introducción al Álgebra

Profesor: José Soto San Martín.

Auxiliar: Ilana Mergudich Thal.

Fecha: Jueves 7 de Abril.



Auxiliar Extra: Repaso Control 2

P1. Sea $\mathcal{U}$ un universo y $f : \mathcal{P}(\mathcal{U}) \rightarrow \mathcal{P}(\mathcal{U})$ la función definida por:

$$f(X) = X^c$$

Demuestre que f es biyectiva.

P2. Sean A, B y C tres conjuntos no vacíos. Sean $f : A \rightarrow B$, $g : B \rightarrow C$ y $h : C \rightarrow A$. Además se tiene que:

- $h \circ g \circ f$ es inyectiva
- $f \circ h \circ g$ es inyectiva
- $g \circ f \circ h$ es sobreyectiva

Demuestre que f, g, h son biyectivas.

P3. Considere el conjunto $\mathcal{F} = \{f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \mid f \text{ es biyectiva}\}$, es decir, el conjunto de todas las funciones biyectivas de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$. Se define la función $\Psi : \mathcal{F} \times \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}$ dada por:

$$\Psi(f, g) = (f \circ g)^{-1}$$

- Justifique por qué $\forall (f, g) \in \mathcal{F} \times \mathcal{F}$, $\Psi(f, g) \in \mathcal{F}$.
- Pruebe que Ψ es sobryectiva, pero **no** inyectiva.
- Demuestre que para todo par $(f, g) \in \mathcal{F} \times \mathcal{F}$,

$$\Psi(\Psi(f, g), \Psi(g^{-1}, f^{-1})) = \text{Id}_{\mathbb{R}}.$$

- [Propuesto] Sean $f, g \in \mathcal{F}$ definidas por $f(x) = 2x + 3$ y $g(x) = \frac{x}{2}$. Además considere el conjunto $A = \{f, g\}$. Encuentre explícitamente $\Psi(A \times A)$.

P4. Sea $\mathcal{U}$ el conjunto universo y $A, B \subseteq \mathcal{U}$. Sea $f : A \rightarrow B$ y $C \subseteq A$. Se define $g : C \rightarrow B$ tal que $g(x) = f(x) \forall x \in C$. Demuestre que $\forall D \subseteq B$, $g^{-1}(D) = C \cap f^{-1}(D)$.

P5. Una función se dice estrictamente creciente si y sólo si

$$(\forall x, y \in \text{Dom}(f)), x < y \Rightarrow f(x) < f(y).$$

- Pruebe que toda función estrictamente creciente es inyectiva
- Si $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ es estrictamente creciente, ¿es sobreyectiva?
- Pruebe que si $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ estrictamente creciente es sobreyectiva, entonces $f = \text{Id}_{\mathbb{N}}$