

MA1101-7 Introducción al Álgebra

Profesor: José Soto San Martín.

Auxiliar: Ilana Mergudich Thal.

Fecha: Miércoles 6 de Abril.



Auxiliar 4: Funciones

Imagen y Preimagen

Resumen:

Sea $f : A \rightarrow B$ una función:

- Dado $A' \subseteq A$, se define el conjunto **imagen de A'** como $f(A') = \{y \in B \mid (\exists x \in A') f(x) = y\}$.
- Dado $B' \subseteq B$, se define el conjunto **preimagen de B'** como $f^{-1}(B') = \{x \in A \mid f(x) \in B'\}$.
- $f(A_1 \cup A_2) = f(A_1) \cup f(A_2)$.

P1. Sea $f : E \rightarrow F$ una función. Demuestre que:

- $(\forall A, B \subseteq E) f(A) \setminus f(B) \subseteq f(A \setminus B)$.
- $[(\forall A, B \subseteq E) f(A) \setminus f(B) = f(A \setminus B)] \Leftrightarrow f$ es inyectiva.
- $(\forall Y \subseteq F) f(f^{-1}(Y)) \subseteq Y$.
- $[(\forall Y \subseteq F) Y = f(f^{-1}(Y))] \Leftrightarrow f$ es sobreyectiva.
- $(\forall Y \subseteq F) f^{-1}(Y^c) = (f^{-1}(Y))^c$.

P2. Sea $f : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$ una función con la siguiente propiedad $f(m+n) = f(m) + f(n)$ para cada par $m, n \in \mathbb{Z}$

- Probar que $f(0) = 0$.
- Probar que $f(-m) = -f(m)$ para cada $m \in \mathbb{Z}$.
- Probar que f es inyectiva si y solo si $f^{-1}(\{0\}) = \{0\}$.

P3. Sea $\mathcal{U} \neq \emptyset$ un conjunto universo. Se define la función:

$$F : \mathcal{P}(\mathcal{U}) \times \mathcal{P}(\mathcal{U}) \rightarrow \mathcal{P}(\mathcal{U})$$

$$(X, Y) \mapsto F((X, Y)) = X \setminus Y$$

- Demuestre que $F^{-1}(\{\mathcal{U}, \emptyset\}) = \{(\mathcal{U}, \emptyset)\} \cup \{(X, Y) \mid X \subseteq Y\}$.
- Determine, justificando, $F(D)$ (imagen de D), donde $D = \{(X, X) \mid X \in \mathcal{P}(\mathcal{U})\}$.
- Demuestre que F es sobreyectiva.
- ¿Es F biyectiva? Justifique.

P4. Sean A y B dos conjuntos y $f : A \rightarrow B$ una función. Se define la función:

$$G : \mathcal{P}(B) \rightarrow \mathcal{P}(A)$$

$$Y \mapsto G(Y) = f^{-1}(Y)$$

Pruebe que G es inyectiva si y solo si f es sobreyectiva.