

PA) a)

$$\neg [(p \vee q) \Leftrightarrow r] \Rightarrow [(q \Rightarrow r) \wedge (p \Rightarrow r)]$$

forma 1: "Contradicción"

Seamos porfiados y digamos que la proposición es falsa, como es una implicancia la única forma de ser falsa es $V \Rightarrow F$

$(p \vee q) \Leftrightarrow r$ es verdadero

$\Rightarrow p \vee q$ tiene el mismo valor de verdad que r (ya sea F o V)

si $(q \Rightarrow r) \wedge (p \Rightarrow r)$ es F
ALGUNO de los dos es F

caso 1 $(q \Rightarrow r)$ es F

$$\Rightarrow q \Leftrightarrow V \wedge r \Leftrightarrow F$$

$$\Rightarrow (p \vee q) \Leftrightarrow (V \vee q) \Leftrightarrow V$$

(Un "V" es FALSO CUANDO AMBAS SON FALSAS)

$$(p \vee q) \Leftrightarrow V \Leftrightarrow F \Leftrightarrow r$$

$\rightarrow \swarrow \nwarrow$

El razonamiento es análogo si $q \Rightarrow r$ es F
Como la proposición NUNCA ES FALSA
PROPORTE SIEMPRE ES VERDADERA.

forma 2: "Directa"

Como el único caso de interés
es $V \Rightarrow ?$ asumamos

$$(p \vee q) \Leftrightarrow r \quad \text{verdadero}$$

Si r FALSO $\Leftrightarrow p \vee q$ FALSO

COMO ES UN "V" NECESARIAMENTE

AMBAS SON F $\Rightarrow p \Rightarrow F \wedge q \Rightarrow F$

$$\begin{aligned} \Rightarrow & (p \Rightarrow r) \wedge (q \Rightarrow r) \\ & (F \Rightarrow F) \wedge (F \Rightarrow F) \\ & \quad V \quad \quad V \\ & \quad \quad V // \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow & ((p \vee q) \Leftrightarrow r) \Rightarrow (p \Rightarrow r) \wedge (q \Rightarrow r) \\ & \quad V \quad \quad \quad V \wedge V \\ & \quad \quad V // \end{aligned}$$

Si r verdadero, la llegada de ambas
implicancias es V , por lo que no son F
así NUEVAMENTE.

$$\begin{aligned} V & \Rightarrow V \wedge V \\ & \quad V // \end{aligned}$$

forma 3: "MAGIA"

Como por supuesto todos recuerdan

$$p \Rightarrow (p \vee q)$$

y por enunciado $p \vee q \Leftrightarrow r$

$$\Rightarrow p \Rightarrow (p \vee q) \Leftrightarrow r$$

$$\Rightarrow p \Rightarrow r$$

ANÁLOGAMENTE $q \Rightarrow r$

$$\Rightarrow [(p \vee q) \Leftrightarrow r] \Rightarrow [(q \Rightarrow r) \wedge (p \Rightarrow r)] //$$

b) Sea $A \subseteq E$ donde E tiene AL MENOS DOS ELEMENTOS, demuestre

$$(\forall B \in (\mathcal{P}(E) \setminus \{\emptyset\}) A \subseteq B) \Rightarrow A = \emptyset$$

Antes de demostrar entendamos que nos piden demostrar

$$\forall B \in (\mathcal{P}(E) \setminus \{\emptyset\})$$

Recordemos que es $\mathcal{P}(E)$

PROARTE $X \in \mathcal{P}(E) \Leftrightarrow X \subseteq E$

y que es la resta de conjuntos

$$x \in Y \setminus A \Leftrightarrow x \in Y \wedge x \notin A$$

en este caso

$$B \in (P(E) \setminus \{\emptyset\})$$

$$\Rightarrow B \in P(E) \wedge B \neq \{\emptyset\}$$

$$\Rightarrow B \subseteq E \wedge B \neq \emptyset$$

$$\text{así } \forall B \in (P(E) \setminus \{\emptyset\}) A \subseteq B$$

significa que A es subconjunto de TODOS los B subconjuntos de E no vacíos

Si eso se cumple NECESARIAMENTE, NO HAY OTRA POSIBILIDAD MÁS QUE A ES VACÍO.

AH! AHORA ENTIENDO, BUENO AHORA DEMOSTREMOSLO.

Por contradicción si $A \neq \emptyset \Rightarrow \exists x_0 \in A$
como $A \subseteq E \Rightarrow x_0 \in E$ pero E tiene
a! menos 2 elementos $\Rightarrow \exists x_1 \neq x_0$ con $x_1 \in E$
y A tiene que ser SUBCONJUNTO DE
CUALQUIER SUBCONJUNTO DE E, en particular
 $A \subseteq \{x_1\} \rightarrow \leftarrow$

Por lo que A NO PUEDE SER NO VACÍO, O SEA $A = \emptyset$.

P2 | a) Sean A, B NO VACÍOS

$$\text{PDQ } A \cap B = \emptyset \Rightarrow A \cup B^c = B^c$$

Nuevamente tenemos una implicancia,
por lo tanto, único caso de interés
 $V \Rightarrow ?$

$\Rightarrow A \cap B = \emptyset$ ES INFORMACIÓN, HAY QUE USARLO

$$\text{PDQ: } A \cup B^c = B^c$$

Como se quiere demostrar una igualdad
de conjunto $A=B \Leftrightarrow A \subseteq B \wedge B \subseteq A$

PDQ $B^c \subseteq A \cup B^c$ Directo de clases, recordemos
que $x \in A \cup B^c \Leftrightarrow x \in A \vee x \in B^c$
 $x \in B^c \Rightarrow x \in A \cup B^c //$

$$\text{PDQ: } A \cup B^c \subseteq B^c$$

$$\text{sea } x \in A \cup B^c \Rightarrow x \in A \vee x \in B^c$$

$$\text{Caso 1: } x \in B^c //$$

$$\text{Caso 2: } x \in A, \text{ como } A \cap B = \emptyset$$

$$\Rightarrow x \notin A \cap B$$

$$\Rightarrow x \notin B$$

$$\Rightarrow x \in B^c$$

(x no está en ambos)

(x no está en B)

(x está en el
complemento de B)

PROPORTE

$$\therefore A \cup B^c \subseteq B^c \wedge B^c \subseteq A \cup B^c \Leftrightarrow A \cup B^c = B^c //$$

b) A, B, X, Y no vacíos y $X \subseteq Y$
 Demuestre que

$$A \cap [X \cup (B \setminus (A \setminus X))] \subseteq A \cap Y$$

Sea $x \in A \cap [X \cup (B \setminus (A \setminus X))]$

$$\Rightarrow \underbrace{x \in A}_{\text{(solo nos falta } x \in Y)} \wedge \underbrace{x \in [X \cup (B \setminus (A \setminus X))]}_{\substack{\text{caso 1} \quad \vee \quad \text{caso 2}}}$$

Caso 1: Por enunciado $X \subseteq Y$
 si $x \in X \Rightarrow x \in Y$, si eso lo
 juntamos con $*$ $\Rightarrow x \in A \cap Y //$

Caso 2: $x \in (B \setminus (A \setminus X))$

antes de continuar trabajemos ese
 conjunto raro

$$\begin{aligned} B \setminus (A \setminus X) &\Leftrightarrow B \cap (A \setminus X)^c \\ &\Leftrightarrow B \cap (A \cap X^c)^c \quad (\text{De Morgan}) \\ &\Leftrightarrow B \cap (A^c \cup X) \quad (x^c = x) \\ &\Leftrightarrow (B \cap A^c) \cup (B \cap X) \quad (\text{distributividad}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow x &\in (B \cap A^c) \cup (B \cap X) \\ \Leftrightarrow x &\in (B \cap A^c) \vee x \in (B \cap X) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Caso 2.1: } x &\in (B \cap A^c) \\ \Leftrightarrow x &\in B \wedge x \in A^c \\ \Leftrightarrow x &\in B \wedge x \notin A \end{aligned}$$

Pero por $\star$ $x \in A$, asique este caso no es posible.

Caso 2.2: $x \in (B \cap X)$

$$\Rightarrow x \in B \cap x \in X$$

$$\Rightarrow x \in X \quad y \text{ por enunciado } x \in Y$$

$$\Rightarrow x \in Y //$$

Así juntando a esto $\star$

$$x \in A \cap x \in Y$$

$$\Rightarrow x \in A \cap Y$$

Como no hay más casos

$$A \cap [X \cup (B \setminus (A \cap X))] \subseteq A \cap Y //$$