P1) a)

• $\delta_E(x): E \to \{0,1\}$

$$x \mapsto \delta_E(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in E \\ 0 & \text{si } x \notin E, \end{cases}$$

Pero esta función está definida $\forall x \in E$, por lo que $x \in E$ siempre

$$\boxed{\therefore\ \delta_E(x) = 1 \qquad \forall x \in E}$$

• $\delta_\emptyset(x): E \to \{0,1\}$

$$x \mapsto \delta_\emptyset(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in \emptyset \\ 0 & \text{si } x \notin \emptyset \end{cases}$$

Pero nunca $x \in \emptyset$, ya que es vacío

$$\boxed{\therefore\ \delta_\emptyset(x) = 0 \qquad \forall x \in E}$$

b) $$\delta_{A \cap B} = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in A \wedge x \in B \\ 0 & \text{si } x \notin A \vee x \notin B \end{cases}$$

caso 1: si $x \in A \wedge x \in B$, $\delta_A(x) = 1 \wedge \delta_B(x) = 1 \Rightarrow \delta_A(x) \cdot \delta_B(x) = 1$

caso 2: si $x \notin A$, $\delta_A(x) = 0 \Rightarrow \delta_A(x) \cdot \delta_B(x) = 0$

caso 3: si $x \notin B$, $\delta_B(x) = 0 \Rightarrow \delta_B(x) \cdot \delta_A(x) = 0$

$$\Rightarrow \delta_A(x) \cdot \delta_B(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in A \wedge x \in B \\ 0 & \text{si } x \notin A \vee x \notin B \end{cases} = \delta_{A \cap B}$$

c) $\Rightarrow |$ Si $x \in C \Rightarrow x \in D$

Por lo que $\delta_C(x) = 1 \Rightarrow \delta_D(x) = 1$ y se cumple que $\delta_C(x) \leq \delta_D(x)$

Si $x \notin C$, $\delta_C(x) = 0$. $\delta_D(x)$ podría ser 0 ó 1, pero en cualquier caso, $\delta_C(x) \leq \delta_D(x)$.

$\therefore C \subseteq D \Rightarrow \delta_C(x) \leq \delta_D(x) \quad \forall x \in E$

$\Leftarrow |$ Sea $x \in C$

$\Rightarrow \delta_C(x) = 1 \leq \delta_D(x)$

$\Rightarrow \delta_D(x) = 1$

$\Rightarrow x \in D$

$\therefore \delta_C(x) \leq \delta_D(x) \Rightarrow C \subseteq D.$

Por lo tanto se concluye que C es subconjunto de D, ssi delta(C) es menor o igual a delta(D)

d) P.D.Q $A = B \Leftrightarrow \delta_A = \delta_B$

$A = B \Leftrightarrow A \subseteq B \wedge B \subseteq A \overset{\text{Por (c)}}{\Leftrightarrow} \delta_A \leq \delta_B \wedge \delta_B \leq \delta_A \Leftrightarrow \delta_A = \delta_B$ //.

e) $E = \{a, b\}$ con $a \in A$ y $b \notin A$.

f) $A \neq E$ y $A \neq \emptyset$

P2 a) P.D.Q $(\forall x,y \in A \cup C)\ h(x) = h(y) \Rightarrow x = y$

caso 1: $x, y \in A$

$$h(x) = h(y)$$
$$\Leftrightarrow f(x) = f(y)$$
$$\Rightarrow x = y \quad \text{(porque } f \text{ es inyectiva)}$$

caso 2: $x, y \in C$

$$h(x) = h(y)$$
$$\Leftrightarrow g(x) = g(y)$$
$$\Rightarrow x = y \quad \text{(porque } g \text{ es inyectiva)}$$

caso 3: $x \in C \wedge y \in A$

$$h(x) = h(y)$$
$$\Leftrightarrow g(x) = f(y)$$

$\rightarrow|\leftarrow$ contradicción

$g: C \to D$ y $f: A \to B$

$$\Rightarrow g(x) \in D \wedge f(y) \in B$$

pero $B \cap D = \emptyset$

$$\therefore g(x) \neq f(y) \quad \forall x, y.$$

y por lo tanto este caso no es posible.

Lo mismo pasa si $x \in A \wedge y \in C$.

$\therefore$ si f y g son inyectivas, h es inyectiva

b) P.D.Q $(\forall y \in B \cup D)(\exists x \in A \cup C)$ tq' $h(x) = y$

Caso 1: $y \in B$

Basta tomar $x \in A$ tal que $f(x) = y$ (que existe porque f es sobreyectiva) y entonces $h(x) = f(x) = y$. //

Caso 2: $y \in D$

Basta tomar $x \in C$ tal que $g(x) = y$ (que existe porque g es sobreyectiva) y entonces $h(x) = g(x) = y$.

$\therefore$ si f, g son sobreyectivas, entonces h es sobreyectiva.

c) Si f y g son biyectivas, en particular son inyectivas y sobreyectivas.

De (a) tenemos que: f, g iny. $\Rightarrow$ h iny.
De (b) tenemos que: f, g sobre. $\Rightarrow$ h sobre.

$\therefore$ si f y g son biyectivas, h es biyectiva.

Ahora tenemos que encontrar la inversa.

$$h^{-1}(x) = \begin{cases} f^{-1}(x) & \text{si } x \in B \\ g^{-1}(x) & \text{si } x \in D \end{cases}$$

(es evidentemente la función que se "devuelve")

Comprobemos que $h^{-1}(h(x)) = x$

Caso 1: $x \in A$

$$h^{-1}(h(x)) = h^{-1}(f(x))$$, y como $f(x) \in B$

$$= f^{-1}(f(x)) = x.$$

Caso 2: $x \in C$

$$h^{-1}(h(x)) = h^{-1}(g(x))$$, y como $g(x) \in D$

$$= g^{-1}(g(x)) = x \ //.$$

P3| a) P.D.Q $\forall z \in A \quad \exists (x,y) \in A \times B$ tal que $\phi(x,y) = z$

Sea $z \in A$ y $m \in B$ cualquiera,

Basta tomar $(x,y) = (z,m) \in A \times B$

y se cumple que $f(z,m) = z \quad \forall z \in A$

$\boxed{\therefore \phi \text{ es sobreyectiva}}$

b) P.D.Q φ es Biyectiva $\Leftrightarrow$ B tiene sólo 1 elemento.

$\Rightarrow)$ Sea φ Biyectiva. Entonces en particular es inyectiva, es decir, $[\forall (x,y),(w,z) \in A \times B]\ \varphi(x,y) = \varphi(w,z) \Rightarrow (x,y) = (w,z)$.

Pero $\varphi(x,y) = \varphi(w,z) \Rightarrow x = w$, no necesariamente $y = z$.

Entonces para que sea inyectiva, necesariamente $y = z \quad \forall y, z \in B$.

Esto significa que todos los elementos de B "son iguales", es decir, hay 1 solo elemento en B.

$\Leftarrow)$ ya que en (a) demostramos que φ siempre es sobreyectiva, solo falta ver que es inyectiva.

Sea $B = \{b\}$. Veamos que $[\forall (x,b),(w,b) \in A \times B]\ \varphi(x,b) = \varphi(w,b) \Rightarrow (x,b) = (w,b)$.

Sea $(x,b);(w,b) \in A \times B \quad \varphi(x,b) = \varphi(w,b) \Rightarrow x = w$

y como $x = w$ y $b = b$, necesariamente $(x,b) = (w,b)$ y por lo tanto φ es inyectiva.

$\boxed{\therefore \varphi \text{ es Biyectiva} \Leftrightarrow B \text{ tiene solo 1 elemento}}$

c) Necesitamos encontrar una función $\varphi^{-1}: A \to A \times B$ tal que

$$\varphi^{-1}(\varphi(x,y)) = Id_{A\times B}, \text{ es decir}$$

$$\varphi^{-1}(\varphi(x,y)) = (x,y)$$

$$\Leftrightarrow \varphi^{-1}(x) = (x,y)$$ donde y es el único elemento de B

$$\boxed{\therefore \varphi^{-1}(x) = (x,y) \quad \forall x \in A}$$

P4) Recordemos que $\forall f, g$ funciones

$f \circ g$ inyectiva $\Rightarrow$ g inyectiva

$f \circ g$ sobreyectiva $\Rightarrow$ f sobreyectiva.

i) Si h es biyectiva y $f \circ g = h$, entonces

$f \circ g$ es biyectiva

$\Leftrightarrow$ $f \circ g$ es inyectiva $\wedge$ $f \circ g$ es sobreyectiva

$\Rightarrow$ g es inyectiva $\wedge$ f es sobreyectiva.

También sabemos que $g \circ f = Id\ A$. La identidad siempre es biyectiva y por lo tanto, $g \circ f$ es biyectiva.

$\Leftrightarrow$ $g \circ f$ es inyectiva $\wedge$ $g \circ f$ es sobreyectiva.

$\Rightarrow$ f inyectiva $\wedge$ g sobreyectiva.

Ya que f y g son inyectivas y sobreyectivas,

f y g son biyectivas.

ii) Tenemos que $f \circ g = h \quad / g \circ$

$$g \circ f \circ g = g \circ h$$

$$\Leftrightarrow \quad Id_A \circ g = g \circ h$$

$$\Leftrightarrow \quad g = g \circ h \quad / g^{-1} \circ$$

(Que existe porque g es biyectiva)

$$g^{-1} \circ g = g^{-1} \circ g \circ h$$

$$\Leftrightarrow \quad id_B = id_B \circ h$$

$$\Leftrightarrow \quad \boxed{id_B = h}$$

P5) a) Recordemos que

$$\Psi \text{ Biyectiva} \iff \text{Existe } \Psi^{-1}.$$

Entonces encontremos la inversa

estamos buscando una función g tal que

$$g(\Psi(f)) = f$$

$$g(f^{-1}) = f$$ osea que g también es una función que te devuelve la inversa! Es decir, $g(f) = f^{-1} = \Psi(f)$

entonces $g = \Psi^{-1} = \Psi$ ya que es función

y $\Psi^{-1}(\Psi(f)) = Id_E = f$ //.

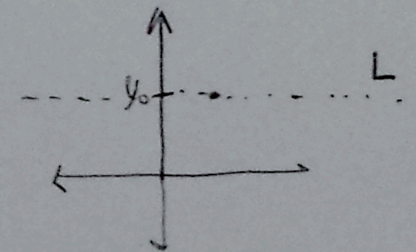
Como la inversa existe, entonces la función es biyectiva.

b) $\Psi(f \circ g) = (f \circ g)^{-1} = g^{-1} \circ f^{-1} = \Psi(g) \circ \Psi(f)$ //

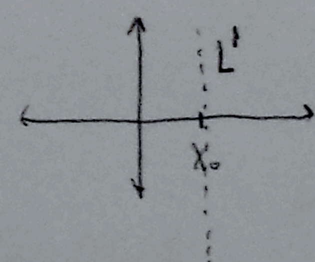
P6) P.D.Q $(\forall (x_0,y_0) \in \mathbb{R}^2)(\exists (L,L') \in \mathcal{L}^2)$ tq' $\psi(L,L') = (x_0,y_0)$

es decir, para cualquier punto, existen 2 rectas que se cruzan ese punto.

Basta tomar $L: y = y_0$



y $L': x = x_0$



y estas 2 rectas siempre se intersectan en (x_0,y_0) $\forall (x_0,y_0) \in \mathbb{R}^2$.