

PAUTA AUXILIAR EXTRA C1

$$\underline{P1} \mid a) [p \Rightarrow (q \Rightarrow r)]$$

$$\Leftrightarrow [\bar{p} \vee (q \Rightarrow r)] \quad (\text{carac. implica})$$

$$\Leftrightarrow [\bar{p} \vee (\bar{q} \vee r)] \quad (\text{carac. implica})$$

$$\Leftrightarrow [(\bar{p} \vee \bar{q}) \vee r] \quad (\text{asociatividad})$$

$$\Leftrightarrow [(p \wedge q) \vee r] \quad (\text{De Morgan})$$

$$\Leftrightarrow [(p \wedge q) \Rightarrow r] \quad (\text{carac. implica})$$

∴ la proposición es tautología

ii) Por contradicción, sea

$$(p \vee q \Leftrightarrow p \wedge r) \quad V$$

y

$$(q \Rightarrow p) \wedge (p \Rightarrow r) \quad F$$

De aquí podemos deducir
que si p es V entonces
 $p \vee q$ es V, por lo que
 $p \wedge r$ es V y entonces r
tiene que ser V.

$$\therefore p \Rightarrow r \text{ es } V$$

Para que esto sea Falso,
alguno de los 2 implícitos debe
serlo. Pero ya sabemos que
 $p \Rightarrow r$ es V, por lo que $q \Rightarrow p$
tiene que ser F.

$$\Rightarrow q \text{ es } V \text{ y } p \text{ es } F.$$

Pero si q es V, $p \vee q$ también lo
es. Pero $p \vee q \Leftrightarrow p \wedge r$ es V,
por lo que si $p \vee q$ es V, $p \wedge r$
tiene que serlo y en particular p
debe ser V



no puede ser que q sea V y p F.

$\therefore$ la proposición es tautología.

b) $(\bar{p} \vee q) \Rightarrow r$ es Falso

$$\Rightarrow (\bar{p} \vee q) \text{ es } V \quad \wedge \quad r \text{ es } F$$

i) $\bar{p} \vee q \Leftrightarrow p \Rightarrow q \Leftrightarrow \bar{q} \Rightarrow \bar{p}$

(carac. implica) $\therefore \bar{q} \Rightarrow \bar{p}$ es V (contrarecíproca)

ii) ya que r es F , tenemos algo de la forma

$$F \Rightarrow [\quad], \text{ por lo que la proposición es } V.$$

P2 a) $(\exists x)(p(x) \wedge ())$

"Existe un 'x' tal que se cumple $p(x)$ y se cumple $q(x)$."

Pero nos dicen que sólo hay 1 "x" tal que se cumple $p(x)$ y lo mismo para $q(x)$. Por lo tanto, necesariamente ese "x" es el mismo para $p(x)$ que para $q(x)$ y es el único que hay.

$$\Rightarrow (\exists! x)(p(x) \wedge p(y))$$

b) EN PAUTA AUXILIAR 1

P3) a) P.D.Q. $X=Y \Leftrightarrow X \subseteq Y \wedge Y \subseteq X$

P.D.Q. $X \subseteq Y$

Sea $x \in X$

hay 2 opciones:

1) $x \in X \wedge x \in A$

2) $x \in X \wedge x \notin A$

veamos el caso (1)

$$x \in X \wedge x \in A$$

$$\Leftrightarrow x \in X \cap A$$

$$\Leftrightarrow x \in Y \cap A \quad (\text{por hip6tesis } X \cap A = Y \cap A)$$

$$\Rightarrow x \in Y //$$

caso (2)

$$x \in X$$

$$\Rightarrow x \in X \cup A$$

$$\Leftrightarrow x \in Y \cup A \quad (\text{por hipotesis } X \cup A = Y \cup A)$$

$$\Leftrightarrow x \in Y \vee x \in A$$

Pero estamos en el caso en que $x \notin A$

$$\Rightarrow x \in Y //$$

La demostración de $Y \subseteq X$ es análoga, y por lo tanto se cumple que:

$$(X \cup A = Y \cup A) \wedge (X \cap A = Y \cap A) \Rightarrow X = Y$$

b) Notemos que $A \cup B \cup C = A \cup B \cup (A \cup B)^c = \mathcal{U}$ (*)

Ahora veamos:

$$(A \Delta B) \Delta C = [(A \Delta B) \setminus C] \cup [C \setminus (A \Delta B)] \quad (A \Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A))$$

$$= [(A \cup B \setminus A \cap B) \setminus C] \cup [C \setminus (A \cup B \setminus A \cap B)] \quad (A \Delta B = A \cup B \setminus A \cap B)$$

$$= [(A \cup B \cap (A \cap B)^c) \cap C^c] \cup [C \cap (A \cup B \cap (A \cap B)^c)^c] \quad (A \setminus B = A \cap B^c)$$

$$= [(A \cup B) \cap (A \cap B)^c \cap (A \cup B)] \cup [(A \cup B)^c \cap ((A \cup B)^c \cup (A \cap B))] \quad (\text{De Morgan}) (C = (A \cup B)^c)$$

usamos ahora que $A \cap B = \emptyset \Leftrightarrow (A \cap B)^c = \mathcal{U}$

$$= [(A \cup B) \cap \mathcal{U}] \cup [(A \cup B)^c \cap ((A \cup B)^c \cup \emptyset)]$$

$$= (A \cup B) \cup (A \cup B)^c \quad (\text{Idempotencia})$$

$$= \mathcal{U} \quad (\text{Idempotencia})$$

$$= A \cup B \cup C // (*)$$

$\therefore (A \Delta B) \Delta C \Leftrightarrow A \cap B = \emptyset$

$$c) i) U \in \mathcal{L}_A \Leftrightarrow \underbrace{U \subseteq U} \wedge \underbrace{U \cap A \neq \emptyset}$$

$$U \cap A = A \neq \emptyset \quad (\text{por enunciado})$$

$$\therefore U \in \mathcal{L}_A$$

$$A \in \mathcal{L}_A \Leftrightarrow \underbrace{A \subseteq U} \wedge \underbrace{A \cap A \neq \emptyset}$$

✓
por enunciado

$$A \cap A = A \neq \emptyset \quad \checkmark$$

$$\therefore A \in \mathcal{L}_A$$

$$ii) (B \cup C) \in \mathcal{L}_A \Leftrightarrow \underbrace{(B \cup C) \subseteq U} \wedge \underbrace{(B \cup C) \cap A \neq \emptyset}$$

$$B \subseteq U \text{ y } C \subseteq U$$

$$\Rightarrow (B \cup C) \subseteq U \quad \checkmark$$

$$(B \cup C) \cap A = \underbrace{(B \cap A) \cup (C \cap A)}$$

$$\neq \emptyset \text{ pg'}$$

$$B \in \mathcal{L}_A$$

$$\Rightarrow (B \cup C) \cap A \neq \emptyset \quad \checkmark$$

$$\therefore (B \cup C) \in \mathcal{L}_A$$

iii) let $X \in \mathcal{P}(A) \setminus \{\emptyset\}$

$$X \subseteq U \quad \checkmark \quad \text{pq} \quad X \subseteq A \subseteq U$$

$$X \cap A = A \neq \emptyset \quad \checkmark$$

↓

$$\text{pq } X \subseteq A \text{ y } X \neq \emptyset$$

$$\therefore (\mathcal{P}(A) \setminus \{\emptyset\}) \subseteq \mathcal{P}_A$$