# PAUTA AUXILIAR 2

**P1)** a) Sea $(x,y) \in A \times C$ arbitrario

$\Leftrightarrow x \in A \wedge y \in C$

$\Rightarrow x \in B \wedge y \in D$

$\Leftrightarrow (x,y) \in B \times D$

$\therefore A \times C \subseteq B \times D$

Sea $x \in A \cup C$ arbitrario

$\Leftrightarrow x \in A \vee x \in C$

$\Rightarrow x \in B \vee x \in D$

$\Leftrightarrow x \in B \cup D$

$\therefore A \cup C \subseteq B \cup D$

b) Hipótesis: $(A \cap B) \subseteq C$

$\Leftrightarrow C^c \subseteq (A \cap B)^c$ (indicación)

$\Leftrightarrow C^c \subseteq (A^c \cup B^c)$ ★ (De Morgan)

Usando esta hipótesis, tenemos que demostrar que $(A \cap C^c) \subseteq B^c$

Sea $x \in (A \cap C^c)$ arbitrario.

$\Leftrightarrow x \in A \wedge x \in C^c$

$\Rightarrow x \in A \wedge x \in (A^c \cup B^c)$ (Por ★)

$\Leftrightarrow x \in A \cap (A^c \cup B^c)$

$\Leftrightarrow x \in (A \cap A^c) \cup (A \cap B^c)$ (Distribuitividad)

$\Leftrightarrow x \in \emptyset \cup (A \cap B^c)$ (Idempotencia)

$\Leftrightarrow x \in (A \cap B^c)$ (Idempotencia)

$\Rightarrow x \in B^c$ $(A \cap B \subseteq A)$

$\therefore [(A \cap B) \subseteq C] \Rightarrow [(A \cap C^c) \subseteq B^c]$

c) $A \Delta B = C \quad / A\Delta$

$\Longleftrightarrow A \Delta (A\Delta B) = A \Delta C$

Desarrollemos el lado izquierdo de la igualdad:

$$A\Delta(A\Delta B) = A\setminus(A\Delta B) \cup (A\Delta B)\setminus A \qquad (\text{Def. } \Delta)$$

$$= (A\cap(A\Delta B)^c) \cup ((A\Delta B)\cap A^c) \qquad (A\setminus B = A\cap B^c)^*$$

$$= (A\cap(A\cup B\setminus A\cap B)^c) \cup ((A\cup B\setminus A\cap B)\cap A^c) \qquad (A\Delta B = A\cup B\setminus A\cap B)$$

$$= [A\cap((A\cup B)\cap(A\cap B)^c)^c] \cup [(A\cup B)\cap(A\cap B)^c\cap A^c] \qquad (*)$$

$$= [A\cap((A\cup B)^c\cup(A\cap B))] \cup [(A\cup B)\cap(A^c\cup B^c)\cap A^c] \qquad (\text{De Morgan})$$

$$= [A\cap((A^c\cap B^c)\cup(A\cap B))] \cup [(A\cup B)\cap(A^c\cup B^c)\cap A^c] \qquad (\text{De Morgan})$$

$$= [A\cap(A^c\cap B^c)] \cup [A\cap(A\cap B)] \cup [[(A\cap A^c)\cup(B\cap A^c)]\cap(A^c\cup B^c)] \qquad \left(\begin{array}{c}\text{conmutatividad}\\\text{distributividad}\end{array}\right)$$

$$= \emptyset \cup [A\cap B] \cup [[\emptyset\cup(A^c\cap B)]\cap(A^c\cup B^c)] \qquad \left(\begin{array}{c}\text{distributividad}\\\text{idempotencia}\end{array}\right)$$

$$= [A\cap B] \cup [(A^c\cap B)\cap(A^c\cup B^c)] \qquad (\text{idempotencia})$$

$$= [A\cap B] \cup [A^c\cap[(B\cap A^c)\cup(B\cap B^c)]] \qquad (\text{distributividad})$$

$$= (A\cap B) \cup [A^c\cap[(B\cap A^c)\cup\emptyset]] \qquad (\text{idempotencia})$$

$$= (A\cap B) \cup [A^c\cap B] \qquad (\text{idempotencia})$$

$$= B\cap(A\cup A^c) \qquad (\text{distributividad})$$

$$= B\cap U \qquad (\text{idempotencia})$$

$$= B \qquad (\text{idempotencia})$$

//

$\therefore A\Delta B = C \Rightarrow B = A\Delta C$

d) P.D.Q $A \cap B^c = \emptyset \iff A \subseteq B$

$\Rightarrow$) Hipótesis: "No existe nadie que viva en $A$ y en $B^c$ a la vez".

Si $A \cap B^c = \emptyset$, significa que no existe ningún "$x$" que esté en $A$ y en $B^c$, o dicho de otra forma, no existe ningún "$x$" que esté en $A$ y no esté en $B$.

Por lo tanto, si $x \in A$, necesariamente pertenece a $B \iff A \subseteq B$.

Demostración formal:

Sea $x \in A$ arbitrario.

$$x \in A \iff x \in A \cap B \vee x \in A \cap B^c$$

$$\iff x \in A \cap B \vee x \in \emptyset \quad \text{(Por Hipótesis)}$$

$$\iff x \in A \cap B \vee F \quad (x \in \emptyset \iff \text{Falso})$$

$$\iff x \in A \cap B \quad (p \vee F \iff p)$$

$$\Rightarrow x \in B$$

$$\therefore A \subseteq B$$

$\Leftarrow$) Sea $x \in A \cap B^c$ arbitrario

$$\iff x \in A \wedge x \in B^c$$

$$\Rightarrow x \in B \wedge x \in B^c$$

$$\iff x \in (B \cap B^c)$$

$$\iff x \in \emptyset$$

$$\rightarrow\leftarrow$$

¡ $\nexists x \in \emptyset$ !

$$\therefore \nexists x \in (A \cap B^c) \Rightarrow A \cap B^c = \emptyset$$

$$\therefore A \cap B^c = \emptyset \iff A \subseteq B$$

P2 a) $\Rightarrow$) Hipótesis: $A \subseteq B$

Sea $X \in P(A)$ arbitrario

$\Leftrightarrow X \subseteq A$

$\Rightarrow X \subseteq B$ (Por hipótesis)

$\Leftrightarrow X \in P(B)$

$\therefore P(A) \subseteq P(B)$

$\Leftarrow$) Hipótesis: $P(A) \subseteq P(B)$

Sea $X \subseteq A$ arbitrario

$\Leftrightarrow X \in P(A)$

$\Rightarrow X \in P(B)$ (Por hipótesis)

$\Leftrightarrow X \subseteq B$

$\therefore A \subseteq B$

$\therefore A \subseteq B \Leftrightarrow P(A) \subseteq P(B)$

La demostración de que $B \subseteq A \Leftrightarrow P(B) \subseteq P(A)$ es análoga (es exactamente igual pero intercambiamos las A con las B).

Ahora, decir que $A = B \Leftrightarrow P(A) = P(B)$

$\Leftrightarrow \quad A \subseteq B \wedge B \subseteq A \Leftrightarrow P(A) \subseteq P(B) \wedge P(B) \subseteq P(A)$

y como ya tenemos esas demostraciones, estamos listos! ◡̈.

b) Sea $X \in P(A \cap B)$ arbitrario

$\iff X \subseteq (A \cap B)$

$\iff X \subseteq A \quad \wedge \quad X \subseteq B$

$\iff X \in P(A) \quad \wedge \quad X \in P(B)$

$\iff X \in P(A) \cap P(B)$

$\therefore P(A \cap B) = P(A) \cap P(B)$

Si $A \cap B = \emptyset$

$P(A \cap B) = P(\emptyset) = \{\{\emptyset\}, \emptyset\}$

c) Sea $X \in P(A) \cup P(B)$

$\iff X \in P(A) \quad \vee \quad X \in P(B)$

$\implies X \subseteq A \quad \vee \quad X \subseteq B$ (es un implica, ¡no un si solo si! Por eso no se tiene para el otro lado)

$\iff X \subseteq (A \cup B)$

$\iff X \in P(A \cup B)$

$\therefore P(A) \cup P(B) \subseteq P(A \cup B)$

P3 | P.D.Q si $\mathcal{U} \neq \emptyset$, $A \subseteq \mathcal{U}$

$$\underbrace{(\forall X, Y \subseteq \mathcal{U})(A \cup X = A \cup Y \Rightarrow X = Y)}_{a} \Rightarrow \underbrace{A = \emptyset}_{b}$$

Por contradicción: Sea **a** V y **b** F.

si **b** es F, entonces $A \neq \emptyset \Rightarrow \exists \bar{x} \in A$

Ahora veamos la parte **a**. Como se tiene que cumplir PARA TODO $X, Y$; si yo tomo cualquier $X$ y cualquier $Y$, en particular se tiene que cumplir para esos.

Entonces tomemos $X = \{\bar{x}\}$ $\quad Y = \emptyset$ (son los únicos conjuntos con los que podemos saber como serán unidos con A)
+ la única otra opción era $X = A^c \wedge Y = \mathcal{U}$

$X \cup A = \{\bar{x}\} \cup A = A$

$\wedge \quad Y \cup A = A \cup \emptyset = A$

$\Rightarrow X \cup A = Y \cup A$

según la hipótesis, si esto pasa, entonces necesariamente $X = Y$

Pero $\{\bar{x}\} \neq \emptyset$

$\rightarrow\mid\leftarrow$

$\therefore (\forall X, Y \subseteq \mathcal{U})(A \cup X = A \cup Y \Rightarrow X = Y) \Rightarrow A = \emptyset$

P4| Tenemos que ver si se cumple que

$$(\forall x \in \emptyset)\ |x| \leq M$$

¿qué es esto?

$x \in \emptyset$ pero $\nexists x \in \emptyset$. Por lo tanto ningún $x$ tiene que cumplir nada y por lo tanto $\emptyset$ es acotado.

Se dice que es verdadero por "vacuidad".

(al final, $F \Rightarrow$ cualquier cosa es verdadero).

P5| $(\exists B > 0)(\forall m \in \mathbb{R})[(\exists x < B)(m \geq x) \wedge (\exists x > B)(m < x)]$

P6) a) Hay 2 casos posibles

1) $B \cap A \neq \emptyset$ : $C(B) = B \setminus B = \emptyset$

2) $B \cap A = \emptyset$ : $C(B) = B \cup B = B$

Por lo tanto, $C(B) = \emptyset \vee C(B) = B$

$\Rightarrow C(B) \in \{\emptyset, B\}$.

b) claramente $A \cap A \neq \emptyset$, entonces (recordemos que $A \neq \emptyset$ y $A \cap A = A$)

$C(A) = A \setminus B$

Pero $A \cap A^c = \emptyset$, entonces

$$C(A^c) = A^c \cup B \underset{\uparrow}{=} (A \cap B^c)^c = (A \setminus B)^c = (C(A))^c$$

De Morgan

c) $C(X \cap Y) = (X \cap Y) \setminus B = X \cap Y \cap B^c = X \cap Y \cap B^c \cap B^c = (X \cap B^c) \cap (Y \cap B^c)$

Esto está casi listo, pero para poder seguir tenemos que demostrar que $X \cap A \neq \emptyset$ y $Y \cap \neq \emptyset$. Por contradicción, digamos $X \cap A = \emptyset$, entonces $(X \cap Y) \cap A = (X \cap A) \cap Y = \emptyset \cap Y = \emptyset \rightarrow\leftarrow$ (por enunciado). La demostración de $Y \cap A$ es análoga. Entonces $(X \cap B^c) \cap (Y \cap B^c) = C(X) \cap C(Y)$ $\therefore C(X \cap Y) = C(X) \cap C(Y)$ si se cumple la hipótesis.

**P7** $B$ **NO** es $\emptyset$ !!

$U$

| | | |
|---|---|---|
| $A$ | $A\times A$ | $A\times A^c$ |
| $A^c$ | $A^c\times A$ | $A^c\times A^c$ |
| | $A$ | $A^c$ |

$\therefore B = (A\times A^c)\cup(A^c\times A)$

**P8** sea $x\in A$ arbitrario $\iff x\in A\cap U \iff x\in A\cap(W\cup W^c)$

$\iff x\in (A\cap W)\cup(A\cap W^c)$

$\iff x\in (A\cap W) \vee x\in(A\cap W^c)$

$\implies x\in (B\cap W) \vee x\in(B\cap W^c)$

$\iff x\in (B\cap W)\cup(B\cap W^c)$

$\iff x\in B\cap(W\cup W^c)$

$\iff x\in B\cap U$

$\iff x\in B$

$\therefore A\subseteq B$