MA1101-7 Introducción al Álgebra
Profesor: José Soto San Martín.
Auxiliar: Ilana Mergudich Thal.
Fecha: Miércoles 23 de Marzo.

Auxiliar 2: Conjuntos

Resumen:

I. **Definiciones básicas:**

- $[(\exists x)(x \in \emptyset)] \Leftrightarrow F$.
- $A \subseteq B \Leftrightarrow (\forall x)(x \in A \Rightarrow x \in B)$.
- $A = B \Leftrightarrow (\forall x)(x \in A \Leftrightarrow x \in B)$.
- $x \in A \cup B \Leftrightarrow (x \in A \vee x \in B)$.
- $x \in A \cap B \Leftrightarrow (x \in A \wedge x \in B)$.
- $A \setminus B = A \cap B^c$.
- $A \Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$.

II. Algunas **propiedades de conjuntos**:

- $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$.
- $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$.
- $(A^c)^c = A$.
- $A \cap B \subseteq A$.
- $A \subseteq A \cup B$.
- $(A \subseteq B) \Leftrightarrow (B^c \subseteq A^c)$.

III. **Conjunto potencia:** Dado A un conjunto $\mathcal{P}(A)$ es el conjunto de todos los subconjuntos de A.

$$X \in \mathcal{P}(A) \Leftrightarrow X \subseteq A$$

P1. Sean $A, B, C, D \subseteq \mathcal{U}$. Demuestre que

(a) Si $A \subseteq B$ y $C \subseteq D$, entonces $A \times C \subseteq B \times D$ y también $A \cup C \subseteq B \cup D$.

(b) $[(A \cap B) \subseteq C] \Rightarrow [(A \cap C^c) \subseteq B^c]$.
Indicación: $A \subseteq B \Leftrightarrow B^c \subseteq A^c$

(c) $A \triangle B = C \Leftrightarrow B = A \triangle C$.

(d) $A \cap B^c = \phi \Leftrightarrow A \subseteq B$

P2. Sean $A, B \subseteq \mathcal{U}$. Demuestre que:

(a) $A \subseteq B \Leftrightarrow \mathcal{P}(A) \subseteq \mathcal{P}(B)$. Con esto concluir que $A = B \Leftrightarrow \mathcal{P}(A) = \mathcal{P}(B)$.

(b) $\mathcal{P}(A \cap B) = \mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B)$. ¿Qué ocurre si $A \cap B = \emptyset$?

(c) $\mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B) \subseteq \mathcal{P}(A \cup B)$. ¿Qué ocurre con la otra inclusión?

P3. Sea U un conjunto no vacío y $A \subseteq U$. Pruebe que si $(\forall X, Y \in \mathcal{P}(U))$ $(A \cup X = A \cup Y \Rightarrow X = Y)$, entonces $A = \phi$.

P4. $A \subseteq \mathbb{R}$ se dice acotado si existe $M \in \mathbb{R}$ tal que $(\forall x \in A)\ |x| \leq M$. ¿Es $\emptyset$ acotado?

P5. Niegue la siguiente proposición: $(\forall \beta > 0)(\exists m \in \mathbb{R})[(\forall x < \beta)(m > x) \wedge (\forall x > \beta)(m \geq x)]$.

P6. Sea $\mathcal{U}$ conjunto universo. Sean A, B conjuntos fijos con $A \neq \emptyset$. Para cualquier conjunto $X \subseteq \mathcal{U}$ se define un nuevo conjunto $C(X)$ de la siguiente forma:

$$C(X) = \begin{cases} X \setminus B \text{ si } A \cap X \neq \emptyset \\ X \cup B \text{ si } A \cap X = \emptyset \end{cases}$$

Pruebe que:

(a) $C(B) \in \{\emptyset, B\}$.

(b) $C(A) = A \setminus B$ y $C(A^c) = (C(A))^c$.

(c) Si $(X \cap Y) \cap A \neq \emptyset \Rightarrow C(X \cap Y) = C(X) \cap C(Y)$.

P7. Sean $A, B \subseteq \mathcal{U}$ conjuntos tales que $(A^c \times A^c) \cup (A \times A) \cup B = \mathcal{U} \times \mathcal{U}$. Encuentre el conjunto B.

P8. *[Propuesto]* Sea $\mathcal{U}$ conjunto universo. Sean A, B, W conjuntos tales que $(A \cap W) \subseteq (B \cap W)$ y $(A \cap W^c) \subseteq (B \cap W^c)$. Demuestre que $A \subseteq B$.