

PAUTA AUXILIAR 1

P1] Para que un implica ($\Rightarrow$) sea FALSO, la única posibilidad es que se de algo de la forma $V \Rightarrow F$.

ya que nos dicen que la proposición:

$$\underbrace{[(p \Leftrightarrow q) \wedge \overline{r \Rightarrow s} \wedge \bar{t}]}_{(a)} \Rightarrow \underbrace{[\bar{s} \wedge (q \Rightarrow s)]}_{(b)} \text{ es falsa,}$$

necesariamente la parte (a) debe ser verdadera y la parte (b) falsa.

Analicemos la parte (a). Esta, a su vez, está compuesta por 3 partes unidas por $\wedge$ ("y" lógico). Por lo tanto, para que (a) sea verdadero, las 3 partes deben serlo. Entonces tenemos que:

(i) $p \Leftrightarrow q$ es V

(ii) $\overline{r \Rightarrow s}$ es V (que es lo mismo que decir que $r \Rightarrow s$ es F)

(iii) $\bar{t}$ es V (que es lo mismo que decir que t es F)

De (ii) tenemos que $r \Rightarrow s$ es FALSO, entonces necesariamente r es V y s es F (la misma explicación de la primera línea).

veamos ahora la parte (b). Esta se compone de 2 partes unidas por un $\wedge$. Por lo tanto, para que (b) sea FALSO, basta con que alguna de las partes sea falsa. Pero ya sabemos que s es F , por lo tanto $\bar{s}$ es V . Entonces necesariamente $q \Rightarrow s$ debe ser Falsa para que (b) también lo sea. Como ya hemos visto, la única opción para que esto sea posible es que q sea V y s sea F . Ahora solo nos falta determinar el valor de verdad de p . Pero (i) nos dice que será el mismo que q . Entonces deducimos que p es V .

Finalmente, podemos concluir que

$$\begin{array}{ll} p \Leftrightarrow V & s \Leftrightarrow F \\ q \Leftrightarrow V & t \Leftrightarrow F \\ r \Leftrightarrow V & \end{array}$$

P2 a) Recordemos que $(a \Leftrightarrow b) \Leftrightarrow [a \Rightarrow b \wedge b \Rightarrow a]$. Entonces, para demostrar una equivalencia ($\Leftrightarrow$), podemos demostrar cada implica por separado. veamos primero el implica hacia la izquierda:

$\Leftarrow$ P.D.Q $p \Rightarrow [p \vee (p \wedge q)]$

si la hipótesis es verdadera (si p es V), inmediatamente se cumple la primera parte de la conclusión y nos queda algo de la forma $V \vee (p \wedge q)$. Esto es verdadero sin importar el valor de verdad de q .

$$\therefore p \Rightarrow [p \vee (p \wedge q)]$$

$\Rightarrow$ P.D.Q $[p \vee (p \wedge q)] \Rightarrow p$

para que la hipótesis sea verdadera hay 2 opciones:

1) p es V , con lo que se cumple que la conclusión es V .

2) $p \wedge q$ es V . Para que esto ocurra, tanto p como q deben ser V . ya que en particular p debe ser V , la conclusión también lo es.

$$\therefore [p \vee (p \wedge q)] \Rightarrow p$$

ya que se cumplen ambas implica, queda demostrado que

$$[p \vee (p \wedge q)] \Leftrightarrow p //$$

b) Forma 1: "MATRACA"

$$[(p \Rightarrow \bar{q}) \wedge (r \Rightarrow q)] \Leftrightarrow [(p \Rightarrow \bar{q}) \wedge (\bar{q} \Rightarrow \bar{r})] \quad (\text{contra recíproca})$$

$$\Rightarrow [p \Rightarrow \bar{r}] \quad (\text{transitividad})$$

$$\therefore [(p \Rightarrow \bar{q}) \wedge (r \Rightarrow q)] \Rightarrow [p \Rightarrow \bar{r}]$$

Forma 2: Por contradicción

Para demostrar por contradicción, asumiremos que la proposición que queremos demostrar es falsa y al llegar a una contradicción concluiremos que no es posible y por lo tanto tiene que ser verdadera;

$$\text{P.D.Q. } \underbrace{[(p \Rightarrow \bar{q}) \wedge (r \Rightarrow q)]}_{(a)} \Rightarrow \underbrace{[p \Rightarrow \bar{r}]}_{(b)}$$

Por contradicción, asumiremos que la parte (a) es V y que la parte (b) es falsa.

Analicemos la parte (b): La única forma de que sea falso es si p es V y $\bar{r}$ es F $\Leftrightarrow$ r es V.

veamos ahora la parte (a): Para que sea verdadero, ambos implicados deben serlo (porque están unidos por un $\wedge$). Entonces,

- $p \Rightarrow \bar{q}$ debe ser V. ya teníamos que p es V, por lo tanto, para que se cumpla la implicancia, $\bar{q}$ debe ser V.

- $r \Rightarrow q$ debe ser V. ya teníamos que r es V, por lo tanto, para que se cumpla la implicancia, q debe ser V.

$\rightarrow | \leftarrow$; pero no es posible que $\bar{q}$ sea V y que q también lo sea!

Hemos llegado a una contradicción. Por lo tanto la proposición nunca puede ser falsa y se concluye que $[(p \Rightarrow \bar{q}) \wedge (r \Rightarrow q)] \Rightarrow [p \Rightarrow \bar{r}]$ es tautología.

P3 | Notemos que $p * q \Leftrightarrow \bar{p} \wedge \bar{q}$ (**) $(\Leftrightarrow \overline{p \vee q})$ (***)
(De Morgan)

a) $\bar{p} \Leftrightarrow \bar{p} \wedge \bar{p}$ (idempotencia)
 $\Leftrightarrow p * p$ (*)

b) $p \vee q \Leftrightarrow \overline{p * q}$ (***)
 $\Leftrightarrow (p * q) * (p * q)$ (a)

c) $p \wedge q \Leftrightarrow \overline{\overline{p \wedge q}} \Leftrightarrow \overline{(\bar{p} \vee \bar{q})}$ (De Morgan)
 $\Leftrightarrow \overline{(\bar{p} * \bar{q})}$ (a)
 $\Leftrightarrow (p * p) * (q * q)$ (***)

P4 | a) "Para toda persona "x" que pertenece a la fila, "x" está más adelante que "p" o bien "x" es la persona "p".

Entonces todas las personas de la fila están más adelante o en el lugar de "p", pero nunca más atrás.

Por lo tanto, "p" tiene que ser la última persona de la fila.

b) "Una sola persona "x" que pertenece a la fila, está más adelante o más atrás que "p".
Entonces necesariamente hay sólo 2 personas en la fila."

Si hubiese sólo 1 persona en la fila, esta sería la persona "p", y nunca podría cumplirse $\emptyset(x, p) \vee \emptyset(p, x)$ ya que "p" no puede estar más adelante o más atrás que sí misma.

Si hubiesen más de 2 personas en la fila, entonces $\emptyset(x, p) \vee \emptyset(p, x)$ podría cumplirse para más de una persona "x" y nos dicen que existe una única persona "x" que cumple esto.

P5 a) P.D.Q $(\exists y)[p(y) \Rightarrow (\forall x)p(x)]$

Forma 1:

Existen 2 casos posibles:

- 1) $\forall x p(x)$: La proposición p siempre es $\forall$
- 2) $\exists x \overline{p(x)}$: Para al menos un x , p no se cumple.

Analizemos el caso 1): si $\forall x p(x)$ es $\forall$, se tiene que

$$(\exists y)[p(y) \Rightarrow \forall]$$

$$\Leftrightarrow \underline{\underline{\forall}}$$

$\therefore$ la proposición es verdadera

Para el caso 2), existe algún y^* tal que $p(y^*) \Leftrightarrow F$
Entonces basta tomar $y = y^*$ y tenemos que

$$p(y^*) \Rightarrow (\forall x)p(x)$$

$$\Leftrightarrow F \Rightarrow (\forall x)p(x)$$

$$\Leftrightarrow \underline{\underline{\forall}}$$

$\therefore$ la proposición es verdadera

Forma 2: Por contradicción

Asumiremos que la proposición es falsa, es decir, $\overline{(\exists y)[p(y) \Rightarrow (\forall x)p(x)]}$

(carac. implica)

$\Leftrightarrow$

$$(\exists y)[\overline{p(y)} \vee (\forall x)p(x)]$$

(De Morgan)

$\Leftrightarrow$

$$(\forall y)[p(y) \wedge (\exists x)\overline{p(x)}]$$

$\rightarrow \leftarrow$

"Para todo y " (en cualquier caso) $p(y)$ se cumple, y a la vez existe al menos un x tal que $p(x)$ no se cumple". Esto es una contradicción, no es posible que $p(y)$ se cumpla en todos los casos y a la vez no se cumpla en alguno.
Por lo tanto, la proposición no puede ser falsa y concluimos que es una tautología.

b) i) P.D.Q $(\forall x)(\exists y)(p(x) \Rightarrow p(y))$

Basta tomar $y=x$ y entonces

$$(\forall x)(\exists x)[p(x) \Rightarrow p(x)] \Leftrightarrow V //$$

ii) P.D.Q $(\exists y)(\forall x)(p(x) \Rightarrow p(y))$ $\therefore$ la proposición es verdadera.

Existen 2 casos posibles:

1) $(\exists y)p(y)$: Para al menos un 'y', se cumple $p(y)$

2) $\overline{(\exists y)p(y)} \Leftrightarrow (\forall y)\overline{p(y)}$: No existe ningún 'y' con el que se cumpla $p(y)$, es decir, $p(y)$ nunca se cumple

veamos el caso 1): Tenemos algo de la forma $[p(x) \Rightarrow V] \Leftrightarrow V //$

En el segundo caso, tenemos $p(x) \Rightarrow F$, pero si $(\forall y)\overline{p(y)}$, entonces $(\forall x)p(x)$ es F y tenemos $F \Rightarrow F \Leftrightarrow V //$

$\therefore$ la proposición es verdadera.