Introduccion al Algebra (MA 1101)

Control Recuperativo - Pauta Problema 1

$F_0, F_1, F_2, \ldots, F_n \ldots$ Cumplen $F_0 = 0,\ F_1 = 1 \wedge F_n = F_{n-1} + F_{n-2}\ \forall n \geq 2$

i) Demostrar, usando inducción, que $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} F_i = F_{n+2} - 1$

$F_2 = F_1 + F_0 = 1$ y $F_3 = F_2 + F_1 = 2$

1) Para $n=1$ $\displaystyle\sum_{i=1}^{1} F_i = F_3 - 1 \Longleftrightarrow F_1 = F_3 - 1 \Longleftrightarrow 1 = 2 - 1 \Longleftrightarrow V$

H.I 2) Sea $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} F_i = F_{n+2} - 1$ algún $n \in \mathbb{N}$

0.5

3) Pdq: $\displaystyle\sum_{i=1}^{n+1} F_i = F_{n+3} - 1$

En efecto $\displaystyle\sum_{i=1}^{n+1} F_i = \sum_{i=1}^{n} F_i + F_{n+1} \overset{H.I.}{=} F_{n+2} - 1 + F_{n+1}$

1.5 $= \underbrace{F_{n+2} + F_{n+1}}_{\text{Recurrencia}} - 1 = F_{n+3} - 1$

ii) Demostrar que $F_n > \left(\frac{3}{2}\right)^{n-1} \quad \forall n \geq 6$

En efecto 1) $F_3 = 2,\ F_4 = 3,\ F_5 = 5,\ F_6 = 8$. Sigue que

1.0 $F_6 > \left(\frac{3}{2}\right)^{6-1} \Longleftrightarrow 8 > \left(\frac{3}{2}\right)^5 \Longleftrightarrow 8 > \frac{243}{32} \Longleftrightarrow V$

1.0 2) Sea $F_k > \left(\frac{3}{2}\right)^{k-1}$ para $k < n$ (2° Forma de Inducción)

3) Por demostrar $F_n > \left(\frac{3}{2}\right)^{n-1}$ donde $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$

2.0 $\Rightarrow F_n > \left(\frac{3}{2}\right)^{n-2} + \left(\frac{3}{2}\right)^{n-3} = \left(\frac{3}{2}\right)^{n-1}\left[\frac{2}{3} + \frac{4}{9}\right] = \left(\frac{3}{2}\right)^{n-1} \overset{>1}{\frac{10}{9}} > \left(\frac{3}{2}\right)^{n-1}$

Pauta Problema 2

$f: A \to B$ biyectiva $\mathcal{F}_A = \{g: A \to A \mid g \text{ función}\}$, $\mathcal{F}_B = \{h: B \to B \mid h \text{ función}\}$

Se define $\varphi: \mathcal{F}_A \to \mathcal{F}_B$ por $\varphi(g) = f \circ g \circ f^{-1}$

i) Mostrar que φ es biyectiva

φ inyectiva: Sean $g_1, g_2 \in \mathcal{F}_A$ tales que $\varphi(g_1) = \varphi(g_2)$

$$\Rightarrow f \circ g_1 \circ f^{-1} = f \circ g_2 \circ f^{-1} \xRightarrow[\text{Asociando}]{f^{-1}\circ} (f^{-1} \circ f) \circ g_1 \circ f^{-1} = (f^{-1} \circ f) \circ g_2 \circ f^{-1}$$

$$\Rightarrow (id_A \circ g_1) \circ f^{-1} = (id_A \circ g_2) \circ f^{-1} \Rightarrow g_1 \circ f^{-1} = g_2 \circ f^{-1} \xRightarrow[\text{Asociando}]{\circ f}$$

$$\Rightarrow g_1 \circ (f^{-1} \circ f) = g_2 \circ (f^{-1} \circ f) \Rightarrow g_1 \circ id_A = g_2 \circ id_A \Rightarrow g_1 = g_2$$

2.0 Sigue que φ es inyectiva.

φ sobreyectiva: Sea $h \in \mathcal{F}_B$. Por demostrar $\exists g \in \mathcal{F}_A$, $\varphi(g) = h$

En efecto, basta tomar $g = f^{-1} \circ h \circ f \in \mathcal{F}_A$ pero $h \in \mathcal{F}_B$

pues $\varphi(g) = f \circ (f^{-1} \circ h \circ f) \circ f^{-1} \overset{\text{Asociando}}{=} (f \circ f^{-1}) \circ h \circ (f \circ f^{-1}) = \underbrace{id_B \circ h \circ id_B}_{h}$

$\Rightarrow \varphi(g) = h$. Así, φ es sobreyectiva y

2.0 por lo tanto φ es biyectiva.

ii) Para $\mathcal{G}_A = \{g \in \mathcal{F}_A \mid g \text{ biyectiva}\}$ y $\mathcal{G}_B = \{h \in \mathcal{F}_B \mid h \text{ biyectiva}\}$ mostrar que $\varphi(\mathcal{G}_A) = \mathcal{G}_B$

En efecto, sea $h \in \varphi(\mathcal{G}_A) \Rightarrow \exists g \in \mathcal{G}_A$, $\varphi(g) = h = f \circ g \circ f^{-1}: B \to B$

1.0 donde f, g, f^{-1} son biyectivas $\Rightarrow f \circ g \circ f^{-1}$ es biyectiva $\Rightarrow h \in \mathcal{G}_B$

Sigue que $\varphi(\mathcal{G}_A) \subseteq \mathcal{G}_B$

Recíprocamente sea $h \in \mathcal{G}_B$, se sabe que $\exists g = f^{-1} \circ h \circ f: A \to A$ biyectiva

1.0 tal que $h = \varphi(g)$; con $g \in \mathcal{G}_A$. Sigue que $h \in \varphi(\mathcal{G}_A)$, entonces $\mathcal{G}_B \subseteq \varphi(\mathcal{G}_A)$

Se concluye que $\varphi(\mathcal{G}_A) = \mathcal{G}_B$