

Control Recuperativo

P1. (i) (3,0 ptos.) Sean p, q, r proposiciones lógicas. Demuestre, sin usar tablas de verdad que:

$$[p \Rightarrow r] \Rightarrow [(p \wedge q) \Rightarrow r] \text{ es una tautología.}$$

(ii) (3,0 ptos.) Sean A, B, W subconjuntos de un conjunto universo U . Demuestre que

$$(A \cap W) \subseteq (B \cap W) \wedge (A \cap W^c) \subseteq (B \cap W^c) \Rightarrow A \subseteq B.$$

P2. La relación \mathcal{R} definida sobre $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ por

$$(a, b)\mathcal{R}(c, d) \Leftrightarrow a + d = c + b$$

es una relación de equivalencia (no lo demuestre).

(i) (2,0 ptos.) Determine explícitamente la clase $[(0, 1)]_{\mathcal{R}}$

(ii) (4,0 ptos.) Sea $f : \mathbb{N} \times \mathbb{N} / \mathcal{R} \rightarrow \mathbb{Z}$ una función definida desde el conjunto cociente a los enteros como

$$f([(a, b)]_{\mathcal{R}}) = a - b.$$

Pruebe que f es biyectiva y averigüe, fundamentando, si el conjunto cociente es numerable.

P3. Sea $\mathcal{F} = \{f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} / (\exists a \in \mathbb{R})(\forall x \in \mathbb{R}) f(x) = ax^2\}$. Se define la función $\varphi : \mathcal{F} \rightarrow \mathbb{R}$ por $\forall f \in \mathcal{F}$, $\varphi(f) = f(2)$.

(i) (4,0 ptos.) Demuestre que φ es una biyección. ¿Es \mathcal{F} numerable?

(ii) (2,0 ptos.) Demuestre que $\forall f, g \in \mathcal{F}$, $\varphi(f \circ g) = \frac{1}{4}\varphi(f)(\varphi(g))^2$.

P4. (i) (3,0 ptos.) Considere la suma

$$S = 1 + \frac{1+2}{2} + \frac{1+2+3}{3} + \dots + \frac{1+2+\dots+n}{n}$$

con $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Escriba S como una sumatoria doble y calcule su valor.

(ii) (3,0 ptos.) Demuestre que $\forall n \in \mathbb{N}$,

$$2^{2n} - 3n - 1 \text{ es divisible por } 9.$$

23 de mayo de 2009
Sin consultas
Tiempo: 1:30 hrs.