Pauta Problema 1 (Recuperativo Algebra)

i) Se debe probar que R definido en $P(E)$ por
$ARB \Longleftrightarrow \exists f: A \to B$ biyectiva, es relación de equiv.

1) R es refleja si $\forall A \in P(E)$, $ARA \Longleftrightarrow \exists f: A \to A$ biyectiva

(1.0) En efecto, $id_A: A \to A$ es biyectiva que confirma ARA $\forall A \in P$

2) Simetría.

Sea $ARB \Longleftrightarrow \exists f: A \to B$ biyectiva

Entonces $f^{-1}: B \to A$ también es biyectiva (f^{-1} inversa de f)

(1.0) $\Longrightarrow BRA$ y por lo tanto R es simétrica

3) Transitividad.

Sean $ARB \wedge BRC \Longleftrightarrow \exists f: A \to B \wedge \exists g: B \to C$

ambas biyectivas

Como la composición de biyecciones es biyección y

(1.0) $g \circ f: A \to C \Longrightarrow ARC$, así R es Transitiva.

Entonces R es relación de Equivalencia.

ii) La clase de equivalencia de $A \in P(E)$, A infinito, es:

$[A]_R = \{X \in P(E) / ARX\}$

Es decir $X \in [A]_R \Longleftrightarrow \exists f: A \to X$ biyectiva

(1.0) o equivalentemente $|A| = |X|$ (igual cardinal)

Pero A es infinito, $A \subseteq E$ y E es numerable

(0.5) Por lo tanto A es numerable (Propiedad clases) ($|A| = |\mathbb{N}|$)

y por lo anterior X es numerable.

(0.5) Se sigue que $[A]_R = \{X \subseteq E / X \text{ es numerable}\}$

(1.0) Dos elementos de $[A]_R$ son: A, que está en su propia clase y también E, pués $E \in P(E)$, $E \neq A$ y E es numerable

Pauta Problema 2

i) Debemos encontrar por separado las preimágenes de U y de ϕ.
Para U debe ocurrir que $f(X,Y) = X - Y = U$ y esto sólo es posible si $X = U$ e Y no le sustrae elementos, es decir $Y = \phi$. Así $f^{-1}(\{U\}) = \{(U,\phi)\}$

(0.5)

Para ϕ debe ocurrir que $X - Y = \phi \iff X \cap Y^c = \phi$
Es decir $\forall a \in X \Rightarrow a \notin Y^c \Rightarrow a \in Y$, así $X \subseteq Y$.
Entonces $f^{-1}(\{\phi\}) = \{(X,Y) \mid X \subseteq Y\}$

(1.5) Se concluye que $f^{-1}(\{U,\phi\}) = \{(U,\phi)\} \cup \{(X,Y) \mid X \subseteq Y\}$

ii) $D = \{(X,X) \mid X \in P(U)\}$.

La imagen de cualquier elemento de D es

$$f((X,X)) = X - X = \phi \qquad \forall (X,X) \in P^2(U)$$

(1.0) Así, $f(D) = \{\phi\}$.

iii) Demostrar que f es sobreyectiva.

$$f : P(U) \times P(U) \longrightarrow P(U)$$
$$(X,Y) \longrightarrow f(X,Y) = X - Y$$ es sobreyectiva si

$(\forall S \in P(U))\ \exists (X,Y) \in P^2(U)$ tal que $f((X,Y)) = S$.

Dado $S \in P(U)$ basta escoger $(X,Y) = (S,\phi) \in P(U) \times P(U)$

(1.5) con lo cual $f(X,Y) = f(S,\phi) = S - \phi = S$

iv) f NO es biyectiva pues no es INYECTIVA

En efecto, por ejemplo $f(X,X) = X - X = \phi \wedge f(Y,Y) = \phi$

$\Rightarrow f(X,X) = f(Y,Y) = \phi$ pero $(X,X) \neq (Y,Y)$ en $P^2(U)$

(1.5)