Introducción al Álgebra (MA1101)
Recuperativo - Pauta Problema 1

a)(i) R_1 y R_2 son relaciones de orden definidas en E_1 y E_2 respectiv.
Por demostrar que R definida en $E_1 \times E_2$ por:

$$(x,y) R (u,v) \iff [x R_1 u \wedge y R_2 v]$$ es un orden en $E_1 \times E_2$

- Reflexividad: $(x,y) R (x,y) \iff x R_1 x \wedge y R_2 y \iff V$ pues

0.6 ambos R_1 y R_2 son de orden y en particular reflejas

- Antisimetría: $(x,y) R (u,v) \wedge (u,v) R (x,y) \iff \begin{cases} x R_1 u \wedge y R_2 v \\ \wedge \\ u R_1 x \wedge v R_2 y \end{cases}$

Asociat.

0.7 $\Rightarrow (x R_1 u \wedge u R_1 x) \wedge (y R_2 v \wedge v R_2 y) \Rightarrow x = u \wedge y = v$ pues

R_1 y R_2 son antisimétricas $\Rightarrow (x,y) = (u,v)$

- Transitividad: $(x,y) R (u,v) \wedge (u,v) R (r,s) \iff \begin{cases} x R_1 u \wedge y R_2 v \\ \wedge \\ u R_1 r \wedge v R_2 s \end{cases}$

Asocia

0.7 $\Rightarrow (x R_1 u \wedge u R_1 r) \wedge (y R_2 v \wedge v R_2 s) \Rightarrow x R_1 r \wedge y R_2 s$ pues

ambos R_1 y R_2 son transitivas $\Rightarrow (x,y) R (r,s)$

(ii) Como R_1 y R_2 son órdenes totales, entonces $(\forall x, u \in E_1) \wedge (\forall y, v \in E_2)$
$(x R_1 u \vee u R_1 x) \wedge (y R_2 v \vee v R_2 y)$ pero puede ocurrir que.

0.5 $(x R_1 u \wedge v R_2 y) \wedge (u \not R_1 x \wedge y \not R_2 v)$ entonces

$$(x,y) R (u,v) \iff x R_1 u \wedge y R_2 v \iff V \wedge F \iff F$$

$$\wedge \quad (u,v) R (x,y) \iff u R_1 x \wedge v R_2 y \iff F \wedge V \iff F$$

En consecuencia $\exists (x,y), (u,v) \in E_1 \times E_2$ tales que

$$(x,y) \not R (u,v) \wedge (u,v) \not R (x,y).$$

0.5 Sigue que R es sólo de orden parcial.

b) $f: E \to E$ $(E \neq \emptyset)$. Demostrar que

i) f es biyectiva $\Leftrightarrow$ $f \circ f$ es biyectiva.

($\Rightarrow$) Sea f biyectiva. Como la composición de biyecciones

0.5 es una biyección $\Rightarrow$ $f \circ f$ es biyectiva.

($\Leftarrow$) Sea $f \circ f$ biyectiva, es decir $f \circ f$ es inyectiva y sobreyectiva

Así, por propiedades conocidas $\begin{cases} f \circ g \text{ iny} \Rightarrow g \text{ inyec.} \\ f \circ g \text{ sobre} \Rightarrow f \text{ sobrey.} \end{cases}$

$$\left.\begin{array}{l} f \circ f \text{ inyectiva} \Rightarrow f \text{ inyectiva} \\ f \circ f \text{ sobreyectiva} \Rightarrow f \text{ sobreyectiva} \end{array}\right\} \Rightarrow f \text{ biyectiva.}$$

1.5

ii) $\forall A \subseteq E,\ f(A) = A \Rightarrow f = id_E$.

En efecto, $\forall x \in E$ podemos definir $A \subseteq E$ como $A = \{x\}$

Por hipótesis $\forall A \subseteq E,\ f(A) = A$, entonces

$$f(A) = f(\{x\}) = \{f(x)\} \text{ y } f(A) = A \Rightarrow \{f(x)\} = \{x\}$$

1.0 Entonces $\forall x \in E$, $f(x) = x$ y por lo tanto $f = id_E$

Pauta Problema 2

a) Demostrar, sin uso de inducción, que

$$\sum_{i=5}^{m}\sum_{j=1}^{i}\frac{i+1}{j(j+1)}=\frac{(m-4)(m+5)}{2}$$

1.0
$$\sum_{i=5}^{m}\sum_{j=1}^{i}\frac{i+1}{j(j+1)} = \sum_{i=5}^{m}\left[(i+1)\sum_{j=1}^{i}\frac{1}{j(j+1)}\right] = \sum_{i=5}^{m}(i+1)\sum_{j=1}^{i}\overbrace{\left(\frac{1}{j}-\frac{1}{j+1}\right)}^{\text{Telescópica}} =$$

1.0
$$= \sum_{i=5}^{m}(i+1)\cdot\left(1-\frac{1}{i+1}\right) = \sum_{i=5}^{m}\cancel{(i+1)}\,\frac{i+\cancel{1}-\cancel{1}}{\cancel{i+1}} = \sum_{i=5}^{m} i = \sum_{i=1}^{m} i - \sum_{i=1}^{4} i$$

1.0
$$= \frac{m(m+1)}{2} - \frac{4\cdot 5}{2} = \frac{1}{2}\left[m^2+m-20\right] = \frac{(m-4)(m+5)}{2}$$

b) Determinar el valor de k si los coeficientes de x^k y de x^{k+1} en el desarrollo de $(3x+2)^{14}$ son iguales.

$$\sum_{k=0}^{14}\binom{14}{k}(3x)^k\,2^{14-k} = (3x+2)^{14} \quad \text{Por TEO del Binomio}$$

$$\Rightarrow (3x+2)^{14} = \sum_{k=0}^{14}\binom{14}{k}3^k\cdot 2^{14-k}\,x^k, \quad \text{Entonces}$$

Coeficiente de x^k es: $\binom{14}{k}3^k\cdot 2^{14-k}$

Coeficiente de x^{k+1} es: $\binom{14}{k+1}3^{k+1}\cdot 2^{\overbrace{14-(k+1)}^{13-k}}$

Entonces
1.5
$$\binom{14}{k}\cancel{3^k}\,\frac{\cancel{2^{14-k}}}{2} = \binom{14}{k+1}\frac{\cancel{3^{k+1}}}{3}\,\cancel{2^{13-k}} \iff \binom{14}{k}\cdot 2 = \binom{14}{k+1}\cdot 3$$

$$\iff \frac{\cancel{14!}}{\cancel{k!}\,\underbrace{\cancel{(14-k)!}}_{14-k}}\cdot 2 = \frac{\cancel{14!}}{\underbrace{\cancel{(k+1)!}}_{k+1}\,\cancel{(13-k)!}}\cdot 3 \iff \frac{2}{14-k} = \frac{3}{k+1}$$

$$\iff 2k+2 = 42-3k \iff 5k = 40 \Rightarrow k = 8 \in \{0,1,\dots,14\}$$

1.5
Así, $k = 8$ es el valor pedido.