



Control Recuperativo

P1. a) (3,0 pts.) Demuestre usando inducción que

$$\forall n \in \mathbb{N}, n \geq 1, \quad \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{2n+1} \leq \frac{5}{6}.$$

b) (3,0 pts.) Sea $k_0 \in \mathbb{N}$ un número natural fijo cualquiera y $n \in \mathbb{N}$ un número impar cualquiera. Demuestre, sin usar inducción, que la suma de los n naturales consecutivos a partir de k_0 , es divisible por n .

P2. Se define en $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ la relación \mathcal{R} por

$$(x, y)\mathcal{R}(z, t) \Leftrightarrow xt = zy.$$

(i) (2,5 pts.) Demuestre que \mathcal{R} es relación de equivalencia y describa explícitamente $[(0, 1)]$ y $[(3, 3)]$.

(ii) (1,5 pts.) Sea $f : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{Q}$ definida por

$$f(x, y) = \frac{x}{y}.$$

Demuestre que

$$(x, y)\mathcal{R}(z, t) \Leftrightarrow f(x, y) = f(z, t).$$

(iii) (1,5 pts.) Demuestre que la función $F : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \setminus \{0\} / \mathcal{R} \rightarrow \mathbb{Q}$ dada por

$$F([(x, y)]) = f(x, y)$$

es biyectiva.

(iv) (0,5 pts.) ¿Es numerable el conjunto cociente de $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ sobre \mathcal{R} ? Justifique.

Consultas sólo al auxiliar
Justifique cada uno de sus pasos
Tiempo: 1:15