Control 3 Introducción al Álgebra MA1101

Pauta Problema 1

a) Se define por recurrencia la colección de reales $(a_n)_{n\in\mathbb{N}-\{0\}}$ de la siguiente forma $a_1=2$, $a_{n+1}=\frac{12}{1+a_n}$ $\forall n\geq 1$

a₁) Demuestre por inducción que $a_{2n-1}<a_{2n+1}$ $\forall n\geq 1$

a₂) Demuestre por inducción que $a_{2n}>3$ $\forall n\geq 1$

Solución

a.1) i) Caso base $n=1$, por dem. q': $a_1<a_3$

En efecto $a_3=\frac{12}{1+a_2}$ y $a_2=\frac{12}{1+a_1}=\frac{12}{1+2}=4$

0.5

Así $a_3=\frac{12}{1+4}=\frac{12}{5}>2=a_1$

ii) Sea $a_{2n-1}<a_{2n+1}$ algún $n\in\mathbb{N}$ (H.I)

0.5

iii) Por Dem. que $a_{2n+1}<a_{2n+3}$.

En efecto, por hipótesis $a_{2n-1}<a_{2n+1} \Leftrightarrow 1+a_{2n-1}<1+a_{2n+1}$

donde $a_n>0$ $\forall n\in\mathbb{N}$ según ley de formación

Sigue que $\frac{12}{1+a_{2n-1}}>\frac{12}{1+a_{2n+1}} \Leftrightarrow a_{2n}>a_{2n+2}$

$\Leftrightarrow 1+a_{2n}>1+a_{2n+2} \Leftrightarrow \frac{12}{1+a_{2n}}<\frac{12}{1+a_{2n+2}}$

1.0

$\Leftrightarrow a_{2n+1}<a_{2n+3}$ que es la tesis.

a.2) i) Caso base $n=1$. Por dem. q' $a_2>3 \Leftrightarrow \frac{12}{1+a_1}>3$

0.5

$\Leftrightarrow \frac{12}{1+2}>3 \Leftrightarrow \frac{12}{3}=4>3 \Leftrightarrow V$ (Se cumple)

ii) Sea $a_{2n}>3$ algún $n\in\mathbb{N}$

0.5

iii) Por dem. q': $a_{2n+2}>3$

En efecto, según hipótesis $a_{2n}>3 \Leftrightarrow a_{2n}+1>4 \Leftrightarrow \frac{12}{1+a_{2n}}<\frac{12}{4}=3$

$\Leftrightarrow a_{2n+1} < 3 \Leftrightarrow 1+a_{2n+1} < 4 \Leftrightarrow \frac{12}{1+a_{2n+1}} < \frac{12}{4} = 3$

1.0 $\Leftrightarrow a_{2n+2} < 3$ · Tesis.

OBS: En cada caso se usó la propiedad. $0 < a < b \Rightarrow \frac{1}{a} > \frac{1}{b}$

b) Sean $a_1, a_2, \ldots a_n$ reales positivos
Demuestre por inducción que.

$$(1+a_1)(1+a_2)\cdots\cdots(1+a_n) \geq 1+\sum_{k=1}^{n} a_k$$

i) Caso base $n=1$. Por dem q' $1+a_1 \geq 1+\sum_{k=1}^{1} a_k = 1+a_1$ Se cumple.

0.5 ii) Sea $(1+a_1)(1+a_2)\cdots\cdots(1+a_n) \geq 1+\sum_{k=1}^{n} a_k$ algun $n \in \mathbb{N}$

iii) Por dem. que: $(1+a_1)(1+a_2)\cdots(1+a_n)\cdot(1+a_{n+1}) \geq 1+\sum_{k=1}^{n+1} a_k$

En efecto, $\underbrace{(1+a_1)(1+a_2)\cdots(1+a_n)}_{H.I.}(1+a_{n+1}) \geq \left(1+\sum_{k=1}^{n} a_k\right)(1+a_{n+1})$

$$= 1+\underbrace{a_{n+1}+\sum_{k=1}^{n} a_k}+a_{n+1}\sum_{k=1}^{n} a_k = 1+\sum_{k=1}^{n+1} a_k + a_{n+1}\sum_{k=1}^{n} a_k$$

1.5 $\geq 1+\sum_{k=1}^{n+1} a_k$ pues $a_{n+1}\cdot\sum_{k=1}^{n} a_k > 0$

Control 3 Introducción al Álgebra MA 1101

Pauta Problema 2

Sea E un conjunto y $A \neq \phi$ un subconjunto de E. Se define en $P(E)$ la relación R por: $X R Y \Leftrightarrow A \setminus Y = A \setminus X$

i) Demuestre que R es una relación de equivalencia

ii) Demuestre que el conjunto cuociente $P(E)/_R = \{[X]_R \,/\, X \in P(A)\}$

Solución (i)

(a) R es refleja ssi $\forall X \in P(E)$ $X R X$.

(0.5) En efecto $X R X \Leftrightarrow A \setminus X = A \setminus X \Leftrightarrow V$

(b) R es simétrica ssi $\forall X, Y \in P(E)$ $X R Y \Rightarrow Y R X$

Sea $X R Y \Leftrightarrow A \setminus X = A \setminus Y \Leftrightarrow A \setminus Y = A \setminus X$

(0.5) $\Leftrightarrow Y R X$

(c) R es transitiva ssi $\forall X, Y, Z \in P(E)$ $X R Y \wedge Y R Z \Rightarrow X R Z$.

Sea $X R Y \wedge Y R Z \Leftrightarrow (A \setminus X = A \setminus Y) \wedge (A \setminus Y = A \setminus Z)$

$\Rightarrow A \setminus X = A \setminus Z \Leftrightarrow X R Z$

(2.0) Sigue que R es refleja, simétrica y transitiva y por lo tanto R es relación de equivalencia

Solución (ii)

Por demostrar que $P(E)/_R = \{[X]_R \,/\, X \in P(A)\}$

Probaremos la doble inclusión.

$(\subseteq)$ Sea $W \in P(E)/_R$ con $W \subseteq E$.

Por demostrar que $W \in \{[X]_R \,/\, X \in P(A)\}$ o

equivalentemente $\exists X \subseteq A$ tal que $[X]_R = [W]_R$.

En efecto, basta tomar $X = A \cap W \subseteq A$ de donde

$$A \setminus X = A - (A \cap W) = A \cap (A \cap W)^c = A \cap (A^c \cup W^c)$$

$$= (A \cap A^c) \cup (A \cap W^c) = \phi \cup (A \cap W^c) = A \cap W^c = A \setminus W$$

de donde $X R W \Rightarrow [X]_R = [W]_R$

y $[W]_R \in \{[X]_R \,/\, X \in P(A)\}$. $\longrightarrow$ 2.0

$(\supseteq)$ Recíprocamente, sea $[W]_R \in \{[X]_R \,/\, X \in P(A)\}$

es decir $\exists X \in P(A)$ tal que $[X]_R = [W]_R$ de donde

$$[W]_R \in P(E)/R$$

Sigue que $P(E)/R = \{[X]_R \,/\, X \in P(A)\}$. $\longrightarrow$ 1.0