Pauta Problema 2

a) $(1+x)^n \geq 1+nx \quad \forall n \in \mathbb{N}$, $x>-1$, x fijo. Induccion.

i) Para $n=0$ $(1+x)^0 \geq 1+0\cdot x \iff 1 \geq 1 \iff V$

0.5 o bien para $n=1$ $(1+x)^1 \geq 1+1\cdot x \iff 1+x \geq 1+x \iff V$

ii) H.I. Sea $(1+x)^n \geq 1+nx$ algún $n \in \mathbb{N}$

0.5 iii) Por dem q' $(1+x)^{n+1} \geq 1+(n+1)x$

En efecto $(1+x)^{n+1} = (1+x)^n(1+x) \underset{H.I.}{\geq} (1+nx)(1+x) = \underbrace{1+nx+x}_{1+(n+1)x}+nx^2$

$\Rightarrow (1+x)^{n+1} \geq 1+(n+1)x+nx^2$ donde $nx^2 \geq 0$ $\forall x>-1, \forall n$

2.0 Sigue que $(1+x)^{n+1} \geq 1+(n+1)x$

b) Secuencia $a_1 = 1$, $a_{n+1} = a_n + \frac{1}{n+1}$, $\forall n \geq 1$

Probar por induccion que $\forall n \geq 1$ $\sum_{i=1}^{n} a_i = (n+1)a_n - n$

1) Para $n=1$ $\sum_{i=1}^{1} a_i = (1+1)a_1 - 1 \iff a_1 = 2a_1 - 1 \iff 1 = 2-1$

0.5 $\iff V$.

2) Sea $\sum_{i=1}^{n} a_i = (n+1)a_n - n$ algún $n \in \mathbb{N}$

0.5 3) Por dem. que: $\sum_{i=1}^{n+1} a_i = (n+2)a_{n+1} - (n+1)$

En efecto $\sum_{i=1}^{n+1} a_i = \sum_{i=1}^{n} a_i + a_{n+1} \overset{H.I}{=} (n+1)a_n - n + a_{n+1}$

De la recurrencia $a_n = a_{n+1} - \frac{1}{n+1}$, asi reemplazando queda

$\sum_{i=1}^{n+1} a_i = (n+1)\left(a_{n+1} - \frac{1}{n+1}\right) - n + a_{n+1} = (n+2)a_{n+1} - 1 - n$

2.0 $\Rightarrow \sum_{i=1}^{n+1} a_i = (n+2)a_{n+1} - (n+1)$