Pauta C3 MA1101 2011-1

P1

a) Caso Base $n=0$.

$$\sum_{k=1}^{1}(-1)^{k-1}k^2 = (-1)^{1-1}1^2 = 1 \quad y \quad (0+1)(0+1)=1 \quad \checkmark \quad (1{,}0 \text{ pto})$$

Paso Inductivo

$$HI: \sum_{k=1}^{2n+1}(-1)^{k-1}k^2 = (n+1)(2n+1)$$

$$pdq: \sum_{k=1}^{2(n+1)+1}(-1)^{k-1}k^2 = ((n+1)+1)(2(n+1)+1) = (n+2)(2n+3)$$

(1,0 pto)

Notemos que

$$\sum_{k=1}^{2n+3}(-1)^{k-1}k^2 = \sum_{k=1}^{2n+1}(-1)^{k-1}k^2 + \underbrace{(-1)^{(2n+2)-1}(2n+2)^2}_{k=2n+2} + \underbrace{(-1)^{(2n+3)-1}(2n+3)^2}_{k=2n+3}$$

$$\xrightarrow{HI} = (n+1)(2n+1) - (2n+2)^2 + (2n+3)^2$$

$$= 2n^2+n+2n+1 - \cancel{4n^2} - 8n - 4 + \cancel{4n^2} + 12n + 9$$

$$= 2n^2 + 7n + 6 \quad \leftarrow (1{,}5 \text{ ptos})$$

Por otra parte

$$(n+2)(2n+3) = 2n^2+3n+4n+6 = 2n^2+7n+6 \quad \blacksquare \quad \leftarrow (0{,}5 \text{ ptos})$$

b) Caso base: $n=1$.

$3+4-1=6$ que es divisible por 3 (0,5 ptos)

Paso inductivo:

HI: 3^n+4^n-1 es divisible por 3 $\Leftrightarrow \exists k\in\mathbb{N} \mid 3^n+4^n-1=3k$.

pdq: $3^{n+1}+4^{n+1}-1$ es divisible por 3 $\Leftrightarrow \exists m\in\mathbb{N} \mid 3^{n+1}+4^{n+1}-1=3m$.

En efecto

$$3^{n+1}+4^{n+1}-1 = 3\cdot 3^n + 4\cdot 4^n - 1 = 3\cdot 3^n + 3\cdot 4^n + 4^n - 1 = 3(3^n+4^n)+4^n-1.$$

$$\overset{HI}{=} 3\cdot(3k) + 4^n - 1. \quad \leftarrow (1{,}0 \text{ ptos})$$

Bastaría demostrar que "4^n-1 es divisible por 3". Hagamos esto por inducción:

Caso Base: $n=1$.

$4-1=3$ que es divisible por 3.

Paso Inductivo:

HI: $4^n-1=3p$, $p\in\mathbb{N}$.

Pdq: $4^{n+1}-1=3q$, $q\in\mathbb{N}$.

Veamos que $4^{n+1}-1=4\cdot 4^n-1=4(4^n-1)+3$

$$\overset{HI}{=} 4(3p)+3 = 3(\underbrace{4p+1}_{q})$$

Así 4^n-1 es divisible por 3 $\forall n\geq 1$ con lo que ← (0,5 ptos)

$3^{n+1}+4^{n+1}-1$ es divisible por 3 $\forall n\geq 1$. ///

P2 | (i) 1.- Refleja: $(a,b)R(a,b) \Leftrightarrow \exists m,n\in\mathbb{Z} \mid a-a=2m$ y $b-b=3n$

En efecto basta tomar $m=n=0\in\mathbb{Z}$. ← (1,0 pto)

$(a,b)R(c,d) \Leftrightarrow \exists m,n\in\mathbb{Z} \mid a-c=2m \wedge b-d=3n$

2.- Simétrica: $(a,b)R(c,d) \Leftrightarrow \exists m,n\in\mathbb{Z} \mid c-a=2(-m) \wedge d-b=3(-n)$

$\Leftrightarrow \exists m,n\in\mathbb{Z} \mid c-a=2m' \wedge d-b=3n'$

$\Leftrightarrow \exists m',n'\in\mathbb{Z} \mid c-a=2m' \wedge d-b=3n'$

$\Leftrightarrow (c,d)R(a,b)$ ← (1,0 pto)

3.- Transitiva:

$(a,b)R(c,d) \wedge (c,d)R(e,f) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (\exists n,m\in\mathbb{Z} \mid a-c=2m \wedge \underline{b-d=3n}) \wedge (\exists p,q\in\mathbb{Z} \mid c-e=2p \wedge \underline{d-f=3q})$

$\Rightarrow \exists n,m,p,q\in\mathbb{Z} \mid a-e=2m+2p \wedge b-f=3n+3q$.

$\Rightarrow \exists r,s\in\mathbb{Z} \mid a-e=2r \wedge b-f=3s$ $(r=m+p,\ s=n+q)$

$\Rightarrow (a,b)R(e,f)$ ← (1,0 pto)

ii) Dado $(a,b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ encontremos su clase de equivalencia:

$$[(a,b)]_R = \{(x,y) \in \mathbb{Z}\times\mathbb{Z} \;/\; (x,y)R(a,b)\}$$

$$= \{(x,y) \in \mathbb{Z}\times\mathbb{Z} \;/\; x-a = 2m \wedge y-b = 3n \text{ para algún } n,m \in \mathbb{Z}\}$$

$$= \{(x,y) \in \mathbb{Z}\times\mathbb{Z} \;/\; x \equiv_2 a \;\wedge\; y \equiv_3 b\}. \leftarrow (1{,}0 \text{ pto})$$

$$= \{(x,y) \in \mathbb{Z}\times\mathbb{Z} \;/\; x \in [a]_2 \;\wedge\; y \in [b]_3\} \leftarrow (1{,}0 \text{ pto})$$

$$= \{x \in \mathbb{Z} \;/\; x \in [a]_2\} \times \{y \in \mathbb{Z} \;/\; y \in [b]_3\}$$

$$= [a]_2 \times [b]_3. \qquad \leftarrow (1{,}0 \text{ pto})$$