Introducción al Álgebra (MA-1101)

Control 3 Pauta Problema 1 (2015-1)

$\mathcal{F} = \{f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z} \,/\, f$ es función$\}$ y sea R una relación en $\mathbb{Z}$.

Se define en $\mathcal{F}$ la relación Ω por

$$\forall f, g \in \mathcal{F} \quad f \,\Omega\, g \iff \forall x \in \mathbb{Z} \quad f(x) \,R\, g(x)$$

a) Demostrar que si R es relación de orden en $\mathbb{Z}$, entonces Ω es también relación de orden en $\mathcal{F}$

Es necesario probar que Ω es refleja, antisimétrica y transit.

i) Ω es refleja ssi $\forall f \in \mathcal{F}$. $f \,\Omega\, f \iff \forall x \in \mathbb{Z} \quad f(x) \,R\, f(x)$

1.0 $\iff V$ pues R es de orden y por lo tanto refleja en $\mathbb{Z}$.

ii) Ω antisimétrica: En efecto, sean $f, g \in \mathcal{F}$ tales que $f \Omega g \wedge g \Omega f$

$\iff \forall x \in \mathbb{Z}$, $f(x) \,R\, g(x) \wedge g(x) \,R\, f(x)$ y como R es también

1.5 antisimétrica (es de orden) $\forall x \in \mathbb{Z} \quad f(x) = g(x) \wedge f, g : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z} \Rightarrow f = g$

iii) Ω es transitiva: En efecto, sean $f, g, h \in \mathcal{F}$ tales que $f \Omega g \wedge g \Omega h$

$\iff \forall x \in \mathbb{Z} \quad f(x) R g(x) \wedge g(x) R h(x)$ y como R es transitiva

0.5 $\Rightarrow \forall x \in \mathbb{Z} \quad f(x) \,R\, h(x) \iff f \,\Omega\, h$

b) (b.1) Dem que si R es relación de equivalencia, Ω también lo es

Es necesario probar que Ω es refleja, simétrica y transitiva

Del punto anterior se rescata que se cumplen la reflexión

0.5 y la transitividad. Sólo resta probar la simetría.

Ω es simétrica: Sean $f, g \in \mathcal{F}$; $f \,\Omega\, g \iff \forall x \in \mathbb{Z}, f(x) R g(x)$

0.5 $\Rightarrow \forall x \in \mathbb{Z} \quad g(x) \,R\, f(x)$ pues R es de equivalencia y por lo tanto simétrica $\iff g \,\Omega\, f$. Se concluye que Ω es de equivalencia

2.0 (b.2) $f_0 : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$, $f_0(x) = 0$, $[f_0]_\Omega = \{f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z} \,/\, \forall x \in \mathbb{Z},\ f R f_0$, con $f_0(x) = 0 \wedge R = \equiv_3\}$

$\Rightarrow [f_0]_\Omega = \{f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z} \,/\, \forall x \in \mathbb{Z} \ f(x) \equiv_3 0\} = \{f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z} \,/\, \forall x \in \mathbb{Z} \ f(x)$ es mult. de $3\}$

Pauta Problema 2

a) Demostrar por inducción que

$$\sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1}\frac{4(k+1)}{(2k+1)(2k+3)} = \frac{1}{3}+(-1)^{n-1}\frac{1}{2n+3}$$

i) Caso base para $n=1$. $\displaystyle\sum_{k=1}^{1} (-1)^{k+1}\frac{4(k+1)}{(2k+1)(2k+3)} = \frac{1}{3}+(-1)^{1-1}\frac{1}{2\cdot 1+3}$

(1.0) $\displaystyle\Leftrightarrow (-1)^{1+1}\frac{4(1+1)}{(2\cdot 1+1)(2\cdot 1+3)} = \frac{1}{3}+(-1)^{0}\frac{1}{5} \Leftrightarrow \frac{4\cdot 2}{3\cdot 5} = \frac{1}{3}+\frac{1}{5} \Leftrightarrow \frac{8}{15}=\frac{8}{15} \Leftrightarrow V$

ii) H.I Sea $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+1}\frac{4(k+1)}{(2k+1)(2k+3)} = \frac{1}{3}+(-1)^{n-1}\frac{1}{2n+3}$ algún $n\in\mathbb{N}$

(1.0) iii) Por dem q': $\displaystyle\sum_{k=1}^{n+1}(-1)^{k+1}\frac{4(k+1)}{(2k+1)(2k+3)} = \frac{1}{3}+(-1)^{n}\frac{1}{2n+5}$

En efecto $\displaystyle\sum_{k=1}^{n+1}(-1)^{k+1}\frac{4(k+1)}{(2k+1)(2k+3)} = \underbrace{\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+1}\frac{4(k+1)}{(2k+1)(2k+3)}}_{H.I.} + (-1)^{n+2}\frac{4(n+2)}{(2n+3)(2n+5)}$

$$= \overbrace{\frac{1}{3}+\underbrace{(-1)^{n-1}}_{-(-1)^{n}}\frac{1}{2n+3}}^{H.I} + \underbrace{(-1)^{n+2}}_{(-1)^{n}}\frac{4(n+2)}{(2n+3)(2n+5)} = \frac{1}{3}+(-1)^{n}\left[\frac{4(n+2)}{(2n+3)(2n+5)}-\frac{1}{2n+3}\right]$$

(2.0) $\displaystyle = \frac{1}{3}+(-1)^{n}\frac{\cancelto{2n+3}{4n+8-2n-5}}{\cancel{(2n+3)}(2n+5)} = \frac{1}{3}+(-1)^{n}\frac{1}{2n+5}$ q.e.d.

b) i) Caso base: Para $n=1$ $n(n+1)(n+2)\dots(n+p-1) = 1\cdot 2\cdot 3\dots p$ que es claramente divisible por p

(0.5)

ii) H.I: Sea $n(n+1)\dots(n+p-1) = kp$, $k\in\mathbb{Z}$, es decir $n(n+1)\dots(n+p-1)$ es divisible por p, algún $n\in\mathbb{N}$.

(1.5)

iii) Para $n+1$, por dem q': $(n+1)(n+2)\dots(n+p-1)(n+p)$ es divisible por p

De la Hipótesis $n(n+1)\dots(n+p-1) = kp \Rightarrow \frac{kp}{n} = (n+1)(n+2)\dots(n+p-1)\in\mathbb{N}$

Entonces $(n+1)(n+2)\dots(n+p-1)(n+p) = \frac{kp}{n}(n+p) = kp+\frac{kp}{n}\cdot p = \left(k+\frac{kp}{n}\right)p$

en que $k+\frac{kp}{n} = k'\in\mathbb{N}$. Así $(n+1)(n+2)\dots(n+p) = k'p$, es decir, es divisible por p