Control 3 ALGEBRA MA110
Pauta Problema 1

i) Se define la relación R en $\mathbb{R}-\{0\}$ por:
$$xRy \Leftrightarrow xy>0$$
Demuestre que R es una relación de equivalencia
Calcule el conjunto cuociente $\mathbb{R}-\{0\}/R$

Solución:
Se debe probar que R es refleja, simétrica y transitiva.
- R es refleja si $\forall x \in \mathbb{R}-\{0\}$, xRx
En efecto, $xRx \Leftrightarrow x\cdot x = x^2 > 0 \Leftrightarrow V$ $\longrightarrow$ 0.5
- Simetría.
Sean $x, y \in \mathbb{R}-\{0\}$; $xRy \Rightarrow x\cdot y>0 \Rightarrow y\cdot x>0$
$\Rightarrow yRx$ $\longrightarrow$ 0.5
- Transitividad.
Sean $x, y, z \in \mathbb{R}-\{0\}$; $xRy \wedge yRz$
$\Rightarrow xy>0 \wedge yz>0 \Rightarrow (xy)(yz)>0$
$\Rightarrow (xz)y^2>0$ con $y^2>0 \Rightarrow xz>0 \Rightarrow xRz$
Así $xRy \wedge yRz \Rightarrow xRz$ y R es Transitiva. $\longrightarrow$ 1.0

Para el conjunto cuociente, se deben determinar las clases de equivalencia
$$[x]_R = \{y \in \mathbb{R}-\{0\} / xRy\} = \{y\in\mathbb{R}-\{0\} / xy>0\}$$
Es decir, la clase de $x \in \mathbb{R}-\{0\}$ considera a todos los reales no nulos que tienen igual signo que x
Sigue que si $x>0$, $[x]_R = \{y\in\mathbb{R}-\{0\} / y>0\} = \mathbb{R}^+$
si $x<0$, $[x]_R = \{y \in \mathbb{R}-\{0\} / y<0\} = \mathbb{R}^-$
Entonces Conjunto cuociente $= \mathbb{R}-\{0\}/R = \{\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^-\}$ $\longrightarrow$ 1.0

ii) Sea E un conjunto no vacío y considere $K \in P(E)$ fijo, $K \neq \phi$

Se define en $P(E)$ la relación R_K por

$$A R_K B \Leftrightarrow B \cap K \subseteq A$$

a) Pruebe que R_K es refleja y transitiva.

b) Proponga un conjunto $K \in P(E)$ de modo que R_K sea relación de orden. Justifique.

Solución

a) R_K es refleja ssi $\forall A \in P(E)$, $A R_K A$

En efecto $A R_K A \Leftrightarrow A \cap K \subseteq A \Leftrightarrow V$ (inmediato) $\longrightarrow$ 0.5

Transitividad.

Sean $A, B, C \in P(E)$; $A R_K B \wedge B R_K C$

$\Leftrightarrow B \cap K \subseteq A \wedge C \cap K \subseteq B$

Pero $C \cap K \subseteq B \;/\cap K \Rightarrow \underbrace{(C \cap K) \cap K}_{C \cap K} \subseteq B \cap K$

$\Rightarrow C \cap K \subseteq B \cap K \wedge B \cap K \subseteq A$ (por hipótesis)

Transit: así $C \cap K \subseteq A \Rightarrow A R_K C$. $\longrightarrow$ 1.0

Sigue que R_K es Transitiva.

b) R_K es refleja y transitiva $\forall K \in P(E), K \neq \phi$

Para que R_K sea de orden, falta asegurar la antisimetría. $\longrightarrow$ 0.5

Seleccionando el conjunto $K = E \in P(E)$ se tiene.

$$\left.\begin{array}{l} A R_E B \Leftrightarrow B \cap E \subseteq A \Leftrightarrow B \subseteq A \\ \text{y } B R_E A \Leftrightarrow A \cap E \subseteq B \Leftrightarrow A \subseteq B \end{array}\right\} \Rightarrow A = B.$$

Con lo cual $R_{K=E}$ es antisimétrica y por lo tanto de Orden

$\longrightarrow$ 1.0

Control 3 ALGEBRA MA 110

Pauta Problema 2

i) Considere la colección de números reales definida por recurrencia $a_0 = 0$, $a_{n+1} = \dfrac{3}{4-a_n}$, $\forall n \in \mathbb{N}$

Usando inducción demuestre que $\forall n \in \mathbb{N}$, $a_n = \dfrac{3(3^n - 1)}{3^{n+1} - 1}$

1) Verifiquemos para $n=0$

$$a_0 = \frac{3(3^0-1)}{3^1-1} = \frac{3\cdot 0}{2} = 0$$ lo que se cumple por definición $\longrightarrow$ 0.5

2) (H.I) Sea $a_n = \dfrac{3(3^n-1)}{3^{n+1}-1}$ algún $n \in \mathbb{N}$ $\longrightarrow$ 0.5

3) Por demostrar que $a_{n+1} = \dfrac{3(3^{n+1}-1)}{3^{n+2}-1}$

En efecto, $a_{n+1} = \dfrac{3}{4-a_n} = \dfrac{3}{4 - \frac{3(3^n-1)}{3^{n+1}-1}}$ $\longrightarrow$ 1.0

$$= \frac{3(3^{n+1}-1)}{4\cdot 3^{n+1} - 4 - \underbrace{3\cdot 3^n}_{3^{n+1}} + 3} = \frac{3(3^{n+1}-1)}{\underbrace{4\cdot 3^{n+1} - 3^{n+1}}_{3\cdot 3^{n+1}} - 1} = \frac{3(3^{n+1}-1)}{\underbrace{3\cdot 3^{n+1}}_{3^{n+2}} - 1}$$

Sigue que $a_{n+1} = \dfrac{3(3^{n+1}-1)}{3^{n+2}-1}$ $\longrightarrow$ 2.0

ii) Demuestre, usando inducción, que el producto de 3 números naturales consecutivos es divisible por 6.

Tres naturales consecutivos pueden escribirse como $n-1$, n, $n+1$ y su producto será

$P = (n-1)n(n+1) = n(n^2-1) = n^3 - n$ $\longrightarrow$ 0.5

Entonces se debe probar que $n^3 - n$ debe ser divisible por 6 $\forall n$

1) Para $n=0$ $\quad n^3-n=0$ que es divisible por 6
ó $n=1$ $\quad 1^3-1=0$ también.

2) Sea $n^3-n=6K$, $K\in\mathbb{N}$ algún $n\in\mathbb{N}$. → 0.5

3) Por demostrar que $(n+1)^3-(n+1)$ es divisible por 6

Pero $(n+1)^3-(n+1) = n^3+3n^2+3n+\cancel{1}-n-\cancel{1} = n^3+3n^2+2n$

Podemos escribir $(n+1)^3-(n+1) = n^3+3n^2+2n = \underbrace{n^3-n}_{6K}+3n^2+3n$

Así $(n+1)^3-(n+1) = 6K+3n(n+1)$ → 0.5

El segundo sumando es claramente divisible por 3 pero además n y $n+1$ son consecutivos y uno de ellos debe ser par, es decir divisible por 2

Así el segundo sumando es divisible por 3 y por 2, luego por 6

Sigue que $(n+1)^3-(n+1) = 6K+6K' = 6(K+K')$

$\therefore$ $(n+1)^3-(n+1)$ es divisible por 6. → 0.5

OBSERVACION

También puede suponerse que los naturales consecutivos son n, $n+1$, $n+2$ con $P=n(n+1)(n+2)$ y el desarrollo y demostración es muy similar al dado.