PAUTA CONTROL 3 ALGEBRA

P1 Sea $U \neq \phi$ un conjunto universo. Se define la función

$f: P(U) \times P(U) \longrightarrow P(U)$ por $f(X, Y) = X \setminus Y$, $(X,Y) \in P(U) \times P(U)$

i) Demuestre que $f^{-1}(\{U, \phi\}) = \{(U, \phi)\} \cup \{(X, Y) / X \subseteq Y\}$

ii) Determine, justificando $f(D)$ (imagen de D) en que $D = \{(X,X) / X \in P(U)\}$

Solución:

i) Debemos encontrar por separado, las preimágenes de U y de ϕ

Para U debe ocurrir que $X \setminus Y = U$ y esto solo es posible si $X = U$ e Y no le sustrae elementos, es decir, $Y = \phi$

$\boxed{0.7 \text{ ptos}} \rightarrow$ Así, $f^{-1}(\{U\}) = \{(U, \phi)\}$

Para ϕ debe ocurrir que $X \setminus Y = \phi \iff X \cap Y^c = \phi$

Es decir $\forall a \in X \rightarrow a \notin Y^c \Rightarrow a \in Y$; Así $X \subseteq Y$

Entonces $f^{-1}(\{\phi\}) = \{(X, Y) / X \subseteq Y\}$

$\boxed{0.8 \text{ ptos}} \rightarrow$ Se concluye que $f^{-1}(\{U, \phi\}) = \{(U, \phi)\} \overset{\text{unión}}{\cup} \{(X, Y) / X \subseteq Y\}$

ii) $D = \{(X, X) / X \in P(U)\}$

La imagen de cualquier elemento de D es.

$f(X, X) = X - X = X \cap X^c = \phi \quad \forall (X, X) \in P(U) \times P(U)$

$\boxed{0.5 \text{ ptos}}$ $\rightarrow$ De modo que $f(D) = \{\phi\}$.

<u>OBSERVACION</u>: Este ultimo resultado es un caso particular del punto (i) donde $f^{-1}(\{\phi\}) = \{(X, Y) / X \subseteq Y\}$ pues en este caso

$X \subseteq \bar{X} \quad \forall \bar{X} \in P(U)$

2 Sea $A \neq \emptyset$ un conjunto y R una relación en A.
Se define la relación R^* en $A \times A$ como

$$(a,b) R^* (a',b') \iff aRa' \wedge bRb'$$

a) (i) Demuestre que si R es de orden, entonces R^* también es de orden.

ii) Muestre que si A tiene al menos dos elementos y R es de orden total, entonces R^* es solo de orden parcial.

<u>Solución:</u>

(i) Probaremos que R^* es refleja, antisimétrica y transitiva

- <u>Refleja</u> Por demostrar que $\forall (a,b) \in A \times A$, $(a,b) R^* (a,b)$

$\boxed{0.3 \text{ ptos}}$ En efecto $(a,b) R^* (a,b) \iff aRa \wedge bRb$ lo que se cumple pues R es de orden, en particular refleja.

<u>Antisimétrica</u> Sean $(a,b),(a',b') \in A \times A$ tales que

$(a,b) R^* (a',b') \wedge (a',b') R^* (a,b) \iff aRa' \wedge bRb' \wedge a'Ra \wedge b'Rb$

reagrupando $\iff (aRa' \wedge a'Ra) \wedge (bRb' \wedge b'Rb)$ pero R es antisimétrica

$\boxed{0.7 \text{ ptos}}$ $\iff a = a' \wedge b = b' \iff (a,b) = (a',b')$

Entonces R^* es antisimétrica.

Transitiva Sean $(a,b),(a',b'),(a'',b'') \in A \times A$ tales que

$(a,b) R^* (a',b') \wedge (a',b') R^* (a'',b'') \Leftrightarrow aRa' \wedge bRb' \wedge a'Ra'' \wedge b'Rb''$

$\overset{\text{agrupando}}{\Longleftrightarrow} \underbrace{(aRa' \wedge a'Ra'')}_{} \wedge \underbrace{(bRb' \wedge b'Rb'')}_{}$ pero R es Transitiva

$\boxed{0.5 \text{ pto}}$ $\Leftrightarrow aRa'' \wedge bRb'' \Leftrightarrow (a,b) R^* (a'',b'')$ $\therefore R^*$ es Transitiva

ii) Sean $(a,b),(a',b') \in A \times A$

Como R es orden total, ocurre que $(aRa' \vee a'Ra) \wedge (bRb' \vee b'Rb)$
Esto indica que puede darse la combinación $aRa' \wedge b'Rb$
y en tal caso

$(a,b) R^* (a',b') \Leftrightarrow aRa' \wedge bRb' \Leftrightarrow V \wedge F \Leftrightarrow F$

$\boxed{0.5 \text{ pto}}$ y $(a',b') R^* (a,b) \Leftrightarrow a'Ra \wedge b'Rb \Leftrightarrow F \wedge V \Leftrightarrow F$

Así $(a,b) \cancel{R^*} (a',b') \wedge (a',b') \cancel{R^*} (a,b)$ $\therefore R^*$ es solo orden PARCIAL.

b) i) Demuestre que si R es de equivalencia, entonces R^* también es de equivalencia

ii) Para $(a,b) \in A \times A$ demuestre que

$$[(a,b)]_{R^*} = [a]_R \times [b]_R$$

Solución (i) Probaremos que R^* es refleja simétrica y transitiva

La reflexión y transitividad ya fueron probadas en el punto (a) (i) y tienen igual desarrollo de modo que el alumno puede darlas por demostradas, a no ser que sólo resuelva esta parte (b)

Simétrica Sean $(a,b), (a',b') \in A \times A$ tales que

$$(a,b) R^* (a',b') \Leftrightarrow aRa' \wedge bRb' \underbrace{\Longleftrightarrow}_{R \text{ es simétrica}} a'Ra \wedge b'Rb$$

$\boxed{1.0 \text{ pto}}$

$$\Leftrightarrow (a',b') R^* (a,b) \quad \therefore R^* \text{ es simétrica}$$

Entonces R^* es relación de equivalencia

ii) Probaremos que la clase de equivalencia de (a,b) según R^* es el producto cruz de las clases de a, y b según R

Sea $(x,y) \in [(a,b)]_{R^*} \Leftrightarrow (x,y) R^* (a,b)$

$$\overset{\text{Por def.}}{\Leftrightarrow} xRa \wedge yRb \overset{\text{def}}{\Leftrightarrow} x \in [a]_R \wedge y \in [b]_R$$

$$\overset{\text{def Prod. Cartes}}{\Longleftrightarrow} (x,y) \in [a]_R \times [b]_R$$

$\boxed{1.0 \text{ pto}}$

Así $[(a,b)]_{R^*} = [a]_R \times [b]_R$