Introducción al Álgebra - Control 3
Pauta Problema 1

a) R definida en $\mathbb{Z}$ por $m R n \iff m^2-n^2$ es múltiplo de 3

$\iff \exists k \in \mathbb{Z};\ m^2-n^2=3k$.

i) R es refleja ssi $\forall m \in \mathbb{Z},\ m R m \iff m^2-m^2=0=3k$ lo cual es verdadero si $k=0$

(0.5) ii) Sean $m,n \in \mathbb{Z}$ tales que $m R n \iff \exists k \in \mathbb{Z};\ m^2-n^2=3k$

$\iff \exists k \in \mathbb{Z};\ n^2-m^2=3(-k)$ con $(-k) \in \mathbb{Z} \Rightarrow n R m$

(0.7) entonces R es simétrica.

iii) Sean $m,n,p \in \mathbb{Z};\ m R n \wedge n R p \iff \exists k_1,k_2 \in \mathbb{Z};\ m^2-n^2=3k_1$ y $n^2-p^2=3k_2 \Rightarrow m^2-p^2=3(k_1+k_2)$ con $k_1+k_2 \in \mathbb{Z} \Rightarrow m R p$

entonces R es transitivo

(0.8) Sigue que R es relación de equivalencia.

(0.5) $[0]_R=\{m \in \mathbb{Z} / m^2-0^2=3k\}=\{0,3,-3,6,-6\}$ múltiplos de 3

(0.5) $[1]_R=\{m \in \mathbb{Z} / m^2-1=3k\}=\{m \in \mathbb{Z} / m^2=3k+1\}=\{1,-1,2,-2\}$

b) $\mathcal{F}=\{(A,f) / A \subseteq \mathbb{R} \wedge f:A \to \mathbb{R},\ f$ es función$\}$. Se define en $\mathcal{F}$ Ω por

$(A,f)\,\Omega\,(B,g) \iff [A \subseteq B \wedge (\forall x \in A)\ f(x)=g(x)]$

(0.5) i) Refleja $(A,f)\,\Omega\,(A,f) \iff [A \subseteq A \wedge (\forall x \in A)\ f(x)=f(x)]$ evidente

ii) Sea $(A,f)\,\Omega\,(B,g) \wedge (B,g)\,\Omega\,(A,f) \iff [A \subseteq B \wedge (\forall x \in A)\ f(x)=g(x)] \wedge [B \subseteq A \wedge (\forall x \in B)\ g(x)=f(x)] \iff [A=B \wedge (\forall x \in A=B)\ f(x)=g(x)]$

(1.0) $\iff A=B \wedge f=g \iff (A,f)=(B,g)$ Así Ω es antisimétrica.

iii) $(A,f)\,\Omega\,(B,g) \wedge (B,g)\,\Omega\,(C,h) \iff [A \subseteq B \wedge (\forall x \in A)\ f(x)=g(x)] \wedge [B \subseteq C \wedge (\forall x \in B)\ g(x)=h(x)]$

(1.0) $\Rightarrow [A \subseteq C \wedge (\forall x \in A)\ f(x)=g(x)=h(x)] \Rightarrow (A,f)\,\Omega\,(C,h)$. R es Transitiva.

(0.5) Entonces Ω es de orden PERO NO es orden TOTAl porque en particular la inclusión $A \subseteq B$ NO LO ES

Pauta Probleme 2

a) Demostrar, por inducción que $\forall n \geq 1$ $2^{2n+1}+1$ es divisible por 3

i) Para $n=0$, $2^1+1=3$ es divisible por 3

o bien para $n=1$, $2^{2+1}+1=8+1=9$ es divisible por 3.

ii) H.I. Supongamos $2^{2n+1}+1$ es divisible por 3, algun $n \in \mathbb{N}$

(1.0) es decir $\exists k \in \mathbb{N}$ tal que $2^{2n+1}+1=3k$.

iii) Por dem. q': $2^{2(n+1)+1}+1 = 2^{2n+3}+1$ es divisible por 3

En efecto $2^{2n+3}+1 = 2^2 \cdot 2^{2n+1}+1 = 4 \cdot 2^{2n+1}+1$

$$= \underbrace{2^{2n+1}+1}_{H.I.} + 3 \cdot 2^{2n+1} = 3k + 3 \cdot 2^{2n+1} = 3(k+2^{2n+1})$$

(2.0) último expresión evidentemente divisible por 3.

b) Se sabe que $\sum_{k=1}^{n} a_k a_{k+1} = b_n$ (Hipótesis)

Calcular $\sum_{k=1}^{n} a_k a_{k-1} = \sum_{k=0}^{n-1} a_{k+1} a_k$ Cambio de índices

(1.5) $= \sum_{k=1}^{n} a_{k+1} a_k + a_1 a_0 - a_{n+1} a_n = b_n + a_1 a_0 - a_{n+1} a_n$

Calcular $\sum_{k=n}^{2n+1} a_k a_{k+1} = \sum_{k=1}^{2n+1} a_k a_{k+1} - \sum_{k=1}^{n-1} a_k a_{k+1}$ (Separación en Sumas

(1.5) Por hipótesis $= b_{2n+1} - b_{n-1}$