Ingeniería Matemática
FACULTAD DE CIENCIAS
FÍSICAS Y MATEMÁTICAS
UNIVERSIDAD DE CHILE
MA1101 Introducción al Algebra 10-1

Pauta Control 3

P1.

(a) Sean $x, y \in \mathbb{R} - \{0\}$, $x \neq y$. Demuestre, usando inducción, que

$$\sum_{k=0}^{n-1} x^{n-1-k} y^k = \frac{x^n - y^n}{x - y} \quad \forall n \geq 1$$

i) Caso base para $n = 1$. Por demostrar que: $\sum\limits_{k=0}^{0} x^{0-k} y^k = \frac{x^1 - y^1}{x-y}$.

$\Leftrightarrow x^0 y^0 = \frac{x-y}{x-y} \Leftrightarrow 1 = 1 \Leftrightarrow V$ (0.5 puntos)

ii) H.I. Suponemos $\sum\limits_{k=0}^{n-1} x^{n-1-k} y^k = \frac{x^n - y^n}{x-y}$ algún $n \in \mathbb{N}$

iii) Debe probarse para $n+1$ que $\sum\limits_{k=0}^{n} x^{n-k} y^k = \frac{x^{n+1} - y^{n+1}}{x-y}$.

En efecto $\sum\limits_{k=0}^{n} x^{n-k} y^k = \sum\limits_{k=0}^{n-1} x^{n-k} y^k + x^{n-n} y^n$ (0.5 puntos)

$= x \sum\limits_{k=0}^{n-1} x^{n-1-k} y^k + y^n = x\frac{x^n - y^n}{x-y} + y^n = \frac{x^{n+1} - xy^n + xy^n - y^{n+1}}{x-y}$ (0.5 puntos)

Sigue que $\sum\limits_{k=0}^{n} x^{n-k} y^k = \frac{x^{n+1} - y^{n+1}}{x-y}$ (1.5 puntos)

(b) La expresión $3n + 2 < 2^n$, claramente no se cumple para $n = 0, 1, 2, 3$ y para $n_0 = 4$, $3 \cdot 4 + 2 < 2^4 \Leftrightarrow 14 < 16 \Leftrightarrow V$. Es decir, $n_0 = 4$ debe ser el primer natural a partir del cual la desigualdad se cumple, lo que debe verificarse por inducción. (1.0 puntos)

H.I. Suponemos que $3n + 2 < 2^n$ algun $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 4$. (0.5 puntos)

Por demostrar que, para $n+1$, $3(n+1) + 2 < 2^{n+1}$.

En efecto, $3(n+1)+2 = (3n+2)+3 < 2^n + 3 < 2^n + 2^n = 2^{n+1}$ donde $2^n > 3$ para $n \geq 4$ (1.5 puntos)

P2.

(a) R está definida en $\mathbb{Z} \times (\mathbb{N} - \{0\})$ por $(a, b)R(c, d) \Leftrightarrow ad = bc$.
R será la relación de equivalencia si es refleja, simétrica y transitiva.

(i) Refleja, si y solo si $\forall (a, b) \in \mathbb{Z} \times (\mathbb{N} - \{0\})$, $(a, b)R(a, b)$.
En efecto, $(a, b)R(a, b) \Leftrightarrow ab = ba$ que es verdadero. (0.5 puntos)

(ii) Simétrica. Sean (a, b), $(c, d) \in \mathbb{Z} \times (\mathbb{N} - \{0\})$ tales que
$(a, b)R(c, d) \Leftrightarrow ad = bc \Leftrightarrow cb = da \Leftrightarrow (c, d)R(a, b)$. Luego R es simétrica. (0.5 puntos)

(iii) Transitiva. Sean (a,b), (c,d), (e,f) pares de $\mathbb{Z} \times (\mathbb{N} - \{0\})$ tales que
$(a,b)R(c,d) \wedge (c,d)R(e,f) \Leftrightarrow ad = bc \wedge cf = de$
Como $b, d, f \neq 0$,
$\Leftrightarrow \frac{a}{b} = \frac{c}{d} \wedge \frac{c}{d} = \frac{e}{f}$
De aquí se concluye que $\Rightarrow af = be \Leftrightarrow (a,b)R(e,f)$.
Entonces R es transitiva.

Se concluye que R es relación de equivalencia. (1.0 puntos)
La clase del par $(0,2)$ es $[(0,2)]_R = \{(x,y) \in \mathbb{Z} \times (\mathbb{N} - \{0\}/(x,y)R(0,2)\}$.

Pero $(x,y)R(0,2) \Leftrightarrow 2x = y \times 0 = 0 \Rightarrow x = 0$.
Sigue que $[(0,2)]_R = \{(0,y)/y \in (\mathbb{N} - \{0\})\}$. (1.0 puntos)

(b) Ω está definido en $\mathbb{Z} \times (\mathbb{N} - \{0\})/R$ por $[(a,b)]_R \Omega [(c,d)]_R \Leftrightarrow ad \leq bc$.
Ω será de orden si es refleja, antisimétrica y transitiva.

(i) Refleja ssi $\forall (a,b) \in \mathbb{Z} \times (\mathbb{N} - \{0\})$, $[(a,b)]_R \Omega [(a,b)]_R \Leftrightarrow ab \leq ba$ que es verdadero. (0.5 puntos)

(ii) Sean $[(a,b)]_R$, $[(c,d)]_R$ clases de $\mathbb{Z} \times (\mathbb{N} - \{0\})/R$ tales que
$[(a,b)]_R \Omega [(c,d)]_R \wedge [(c,d)]_R \Omega [(a,b)]_R \Leftrightarrow ad \leq bc \wedge cb \leq da \Rightarrow ad = bc$.
Pero esto último significa que $(a,b)R(c,d)$ y por lo tanto
$[(a,b)]_R = [(c,d)]_R$ (Propiedad de Clases).
Sigue que Ω es antisimétrica. (1.0 puntos)

(iii) Transitividad. Sean las clases de $(a,b), (c,d)$ y (e,f) tales que
$[(a,b)]_R \Omega [(c,d)]_R \wedge [(c,d)]_R \Omega [(e,f)]_R \Leftrightarrow ad \leq bc \wedge cf \leq de$
$\Leftrightarrow \frac{a}{b} \leq \frac{c}{d} \wedge \frac{c}{d} \leq \frac{e}{f}$ donde $b, d, f \in (\mathbb{N} - \{0\})$

$\Leftrightarrow \frac{a}{b} \leq \frac{e}{f}$ (Transitividad de $\leq$) $\Leftrightarrow af \leq be$

$\Leftrightarrow [(a,b)]_R \Omega [(e,f)]_R$. Sigue que Ω es Transitiva. (1.0 puntos)

Con lo cual Ω es relación de orden.
El orden es TOTAL pues $[(a,b)]_R \Omega [(c,d)]_R \Leftrightarrow ad \leq bc \Leftrightarrow \frac{a}{b} \leq \frac{c}{d}$
donde $\frac{a}{b}, \frac{c}{d} \in \mathbb{Q}$ y $\leq$ es orden total en $\mathbb{Q}$. (0.5 puntos)