MA1101 ALGEBRA CONTROL 3 (13-1)

Pauta Problema 1

a) Demostrar que $(\forall n \in \mathbb{N})$ $5^{2n}+(-1)^{n+1}$ es divisible por 13

Caso base $n=0$ Pdq' $5^0+(-1)^{0+1} = 1+(-1) = 0$ div por 13

(0.5) lo cual es verdadero

H.I. Sea $5^{2n}+(-1)^{n+1}$ divisible por 13 algún $n \in \mathbb{N}$

(0.5) es decir $\exists k \in \mathbb{N}$ tal que $5^{2n}+(-1)^{n+1} = 13k$.

Por dem. q': $5^{2(n+1)}+(-1)^{(n+1)+1} = 25\cdot 5^{2n} - (-1)^{n+1}$ div por 13

Pero $25\cdot 5^{2n} - (-1)^{n+1} = 26\cdot 5^{2n} - \underbrace{\left(5^{2n}+(-1)^{n+1}\right)}_{H.I} = 26\cdot 5^{2n} - 13k$

(2.0) Sigue que $5^{2(n+1)}+(-1)^{(n+1)+1} = 13\underbrace{\left[2\cdot 5^{2n} - k\right]}_{k'} = 13k'$ div por 13

b) Demostrar que $\forall n \geq 1$

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{n^2} \geq \frac{3}{2} - \frac{1}{n+1}$$

(0.5) Caso base: $n=1$ Por demq' $1 \geq \frac{3}{2} - \frac{1}{1+1} \iff 1 \geq \frac{3}{2} - \frac{1}{2} = 1 \iff V$

H.I: Sea $1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\dots+\frac{1}{n^2} \geq \frac{3}{2} - \frac{1}{n+1}$ algún $n \in \mathbb{N}, n \geq 1$

(0.5) Por dem. q': $1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\dots+\frac{1}{n^2}+\frac{1}{(n+1)^2} \geq \frac{3}{2} - \frac{1}{n+2}$

En efecto $\underbrace{1+\frac{1}{2^2}+\dots+\frac{1}{n^2}}_{H.I} + \frac{1}{(n+1)^2} \geq \frac{3}{2} - \frac{1}{n+1} + \frac{1}{(n+1)^2} = \frac{3}{2} - \frac{1}{n+1}\left[1 - \frac{1}{n+1}\right]$

(1.0) $= \frac{3}{2} - \frac{1}{n+1}\cdot\frac{n+1-1}{n+1} = \frac{3}{2} - \frac{n}{(n+1)^2}$

Tesis

Pero $\cancel{\frac{3}{2}} - \frac{n}{(n+1)^2} \geq \cancel{\frac{3}{2}} - \frac{1}{n+2} \iff \frac{n}{(n+1)^2} \leq \frac{1}{n+2} \iff n(n+2) \leq (n+1)^2$

$\iff \cancel{n^2} + \cancel{2n} \leq \cancel{n^2} + \cancel{2n} + 1 \iff 0 \leq 1 \iff$ ✓

(1.0) Sigue que $1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\dots+\frac{1}{n^2}+\frac{1}{(n+1)^2} \geq \frac{3}{2} - \frac{1}{n+2}$ //

Pauta Problema 2

a) Se define en $\mathbb{R}$ la relación ψ por

$x \,\psi\, y \iff (\exists n \in \mathbb{N}\cup\{0\})$ tal que $y - x = n$

i) Demostrar que ψ es una relación de orden

1) ψ es refleja ssi $\forall x \in \mathbb{R}$, $x \,\psi\, x \iff (\exists n \in \mathbb{N}\cup\{0\})\ x - x = n$

lo cual es verdadero pues $x - x = 0 = n \in \mathbb{N}\cup\{0\}$.

0.5 → 2) Antisimetrica: Sean $x, y \in \mathbb{R}$; $x \,\psi\, y \wedge y \,\psi\, x \iff$

$\exists n_1, n_2 \in \mathbb{N}\cup\{0\}$ $y - x = n_1 \wedge x - y = n_2 \Rightarrow n_1 + n_2 = 0$

1.0 → con $n_1, n_2 \in \mathbb{N}\cup\{0\} \Rightarrow n_1 = n_2 = 0 \Rightarrow x = y$ $(y - x = 0 = x - y$

3) Transitiva: Sean $x, y, z \in \mathbb{R}$; $x \,\psi\, y \wedge y \,\psi\, z \iff \exists n_1, n_2 \in \mathbb{N}$

tales que $y - x = n_1 \wedge z - y = n_2 \Rightarrow z - x = n_1 + n_2 = n_3 \in \mathbb{N}\cup\{0\}$

0.5 → $\Rightarrow x \,\psi\, z$

así, ψ es refleja, antisimétrica y transitiva, es decir, es rel. de ord

ii) ψ es solo un orden parcial pues, por ejemplo, si $x \in \mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}$

y $y \in I \subseteq \mathbb{R}$ (irracional) $(x - y) \notin \mathbb{N}\cup\{0\} \wedge (y - x) \notin \mathbb{N}\cup\{0\}$, es deci

1.0 → $\exists x, y \in \mathbb{R}$; $x \not\psi y \wedge y \not\psi x$ (Orden Parcial)

b) Se define ϕ en $\mathbb{R}$ por $x \,\phi\, y \iff (\exists n \in \mathbb{Z})$; $y - x = n$

i) Dem q' ϕ es relación de Equivalencia

0.5 → 1) ϕ es refleja: $x \,\phi\, x \iff x - x = 0 \in \mathbb{Z}$

2) Simétrica: Sea $x \,\phi\, y \Rightarrow (\exists n \in \mathbb{Z})$, $y - x = n \Rightarrow (\exists n \in \mathbb{Z})\ x - y =$

0.7 → con $-n \in \mathbb{Z} \Rightarrow y \,\phi\, x$

3) ϕ es Transitiva: Sea $x \,\phi\, y \wedge y \,\phi\, z \Rightarrow (\exists n_1, n_2 \in \mathbb{Z})\ y - x = n_1 \wedge z - y =$

0.8 → $\Rightarrow (\exists n_1, n_2 \in \mathbb{Z})\ z - x = (n_1 + n_2) \in \mathbb{Z} \Rightarrow x \,\phi\, z$

Se sigue que ϕ es relación de equivalencia.

ii) La clase de equivalencia de $p \in \mathbb{Z}$ es $[p]_\phi = \{x \in \mathbb{R} \mid x \,\phi\, p\} =$

1.0 → $= \{x \in \mathbb{R} / x - p = n \in \mathbb{Z}\} = \{x \in \mathbb{R} / x = (p + n) \in \mathbb{Z}\} \Rightarrow [p]_\phi = \mathbb{Z}$