Introducción al Álgebra - Control 3
Pauta Problema 1

R definida en $\mathbb{Z}$ por $xRy \iff b \mid ax+y$; $a,b \in \mathbb{N}$, $a \geq 1$, $b \geq 2$

i) Demostrar que R es refleja si y solo si $b \mid a+1$

$(\Rightarrow)$ Sea R refleja, es decir, $\forall x \in \mathbb{Z}$ $xRx \iff b \mid ax+x \Rightarrow b \mid (a+1)x$

(1.0) y como x es cualquier entero, $b \mid a+1$

$(\Leftarrow)$ Sea $b \mid a+1$ y probemos que R es refleja, es decir

(1.0) $\forall x \in \mathbb{Z}$, $xRx \iff b \mid ax+x \iff b \mid (a+1)x \iff V$ pués $b \mid a+1$

ii) Demostrar que si R es simétrica, entonces $b \mid a^2-1$

En efecto, R es simétrica si $(\forall x,y \in \mathbb{Z})(xRy \Rightarrow yRx)$, es decir,

si $b \mid ax+y \Rightarrow b \mid ay+x$ o bien si $\exists p \in \mathbb{Z}$, $ax+y = pb$ entonces

(1.0) $\exists q \in \mathbb{Z}$, $ay+x = qb$ de donde $a(pb-ax)+x = qb \Rightarrow$

$apb - a^2x + x = qb \Rightarrow (ap-q)b = (a^2-1)x$ donde $(ap-q) \in \mathbb{Z}$ y

(1.0) x arbitrario. Se concluye que $b \mid a^2-1$

iii) Demostrar que para $a=3$ y $b=4$, R es Rel. de Equiv y encontrar $\mathbb{Z}/R$

Para estos valores, $b \mid a+1$ pués $4 \mid 3+1$ según (i) y por lo tanto R

(0.5) es refleja. Falta probar que R es simétrica y transitiva.

- R es simétrica si $(\forall x,y \in \mathbb{Z})(xRy \Rightarrow yRx)$

Sea $xRy \iff 4 \mid 3x+y \iff \exists k \in \mathbb{Z}$, $3x+y = 4k \iff \exists k \in \mathbb{Z}$, $9x+3y = 12k$

$\iff \exists k \in \mathbb{Z}$, $x+3y = 12k - 8x \iff \exists k \in \mathbb{Z}$, $3y+x = 4\underbrace{(3k-2x)}_{\in \mathbb{Z}}$, $3k-2x = p \in \mathbb{Z}$

(0.5) $\iff 4 \mid 3y+x \iff yRx$. R es simétrica.

- R es Transitiva: Sean $xRy \wedge yRz \iff \exists p,q \in \mathbb{Z}$, $3x+y = 4p \wedge 3y+z = 4q$

$\Rightarrow 3x+4y+z = 4(p+q) \Rightarrow 3x+z = 4(p+q-y)$ donde $p+q-y = n \in \mathbb{Z}$

(0.5) $\Rightarrow 3x+z = 4n \Rightarrow xRz$. R es Transitiva; R es Rel de equivalencia

Finalmente, $xRy \iff 4 \mid 3x+y \iff \exists k \in \mathbb{Z}$; $3x+y = 4k \iff$

$\iff y-x = 4(k-x)$ donde $k-x = m \in \mathbb{Z}$, por lo tanto

(0.5) $xRy \iff x \equiv_4 y$. Sigue que $\mathbb{Z}/R = \{[0]_R, [1]_R, [2]_R, [3]_R\}$

($x \equiv_4 y$ x congruente con y módulo 4)