Ingeniería Matemática
FACULTAD DE CIENCIAS
FÍSICAS Y MATEMÁTICAS
UNIVERSIDAD DE CHILE
Introducción al Álgebra. MA1101. 2015-1

Control 3

P1. Sea $\mathcal{F} = \{f : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z} | f \text{ es función}\}$, y sea $\mathcal{R}$ una relación en $\mathbb{Z}$.

Se define en $\mathcal{F}$ la relación Ω, dada por:

$$\forall f, g \in \mathcal{F}, f\Omega g \iff \forall x \in \mathbb{Z} f(x)\mathcal{R}g(x)$$

a) (3.0 ptos.) Demuestre que si $\mathcal{R}$ es relación de orden en $\mathbb{Z}$, entonces Ω es también una relación de orden en $\mathcal{F}$.

b) *i*) (1.0 pto) Demuestre que si $\mathcal{R}$ es relación de equivalencia en $\mathbb{Z}$, entonces Ω es también una relación de equivalencia en $\mathcal{F}$.

ii) (2 ptos.) Sea $\mathcal{R}$ la relación $\equiv_3$, es decir congruencia módulo tres, y sea $f_0 : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}, f_0 \in \mathcal{F}$ definida por $f_0(x) = 0, \forall x \in \mathbb{Z}$. Demuestre que $[f_0]_\Omega = \{f : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z} | \forall x \in \mathbb{Z}, f(x) \text{ es múltiplo de } 3\}$.

P2. *a*) (4ptos) Demuestre por inducción que:

$$\sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \frac{4(k+1)}{(2k+1)(2k+3)} = \frac{1}{3} + (-1)^{n-1} \frac{1}{(2n+3)}$$

b) (2 ptos) Demuestre que, $\forall p \geq 1, p \in \mathbb{N}$ y por inducción sobre n que:

$$n(n+1)(n+2)\ldots(n+p-1) \text{ es divisible por } p$$

Tiempo: 1 hora 15 minutos.